ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ
CỦA VIỆT NAM
TỪ NĂM 2005 ĐẾN NĂM 2010

PHẦN I

*****

ĐỀ BÀI

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2005

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Cho tam giác ABC có (I) và (O) lần lượt là các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi ω_A, ω_B, ω_C lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (I) và (O) lần lượt tại các điểm D, K (với đường tròn ω_A); tại E, M (với đường tròn ω_B) và tại F, N (với đường tròn ω_C). Chứng minh rằng:

1. Các đường thẳng DK, EM, FN đồng quy tại P.
2. Trực tâm của tam giác DEF nằm trên đoạn OP.

Bài 2. Trên một vòng tròn có n chiếc ghế được đánh số từ 1 đến n. Người ta chọn ra k chiếc ghế. Hai chiếc ghế được chọn gọi là kề nhau nếu đó là hai chiếc ghế được chọn liên tiếp. Hãy tính số cách chọn ra k chiếc ghế sao cho giữa hai chiếc ghế kề nhau, không có ít hơn 3 chiếc ghế khác.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^3+y^3+z^3)=(f(x))^3+(f(y))^3+(f(z))^3$$

Ngày thi thứ hai.

Bài 4. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\geq\frac{3}{8}$$

trong đó a,b,c là các số thực dương.

Bài 5. Cho số nguyên tố p $(p>3)$. Tính:

a) $S=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]$ nếu $p\equiv 1\ (\text{mod}\,4)$.

b) $S=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{k^2}{p}\right]$ nếu $p\equiv 1\ (\text{mod}\,8)$.

Bài 6. Một số nguyên dương được gọi là *"số kim cương 2005"* nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $(a_n), n=1,2,3,\ldots$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn $a_n<nC$ (C là hằng số thực dương nào đó).

Chứng minh rằng dãy số $(a_n), n=1,2,3,\ldots$ chứa vô hạn *"số kim cương 2005".*

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2006

**** Ngày thi thứ nhất.***

Bài 1. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của BC.

Bài 2. Hãy tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(n\ ;\ k)$ với n là số nguyên không âm và k là số nguyên lớn hơn 1 sao cho số : $A = 17^{2006n} + 4.17^{2n} + 7.19^{5n}$ có thể phân tích được thành tích của k số nguyên dương liên tiếp.

Bài 3. Trong không gian cho 2006 điểm mà trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các điểm đó lại bởi các đoạn thẳng. Số tự nhiên m gọi là số tốt nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng trong các đoạn thẳng đã nối bởi một số tự nhiên không vượt quá m sao cho mỗi tam giác tạo bởi ba điểm bất kì trong số các điểm đó đều có hai cạnh được gán bởi hai số bằng nhau và cạnh còn lại gán bởi số lớn hơn hai số đó.
Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.

**** Ngày thi thứ hai .***

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực $x,\ y,\ z \in [1;2]$, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Bài 5. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d luôn vuông góc với OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các tia AB, AC. Giả sử các đường thẳng BN và CN cắt nhau tại K; giả sử đường thẳng AK cắt đường thẳng BC.

1. Gọi P là giao của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.
2. Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt BC = a và l là khoảng cách từ điểm A đến HK. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC.

Từ đó suy ra: $l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài 6. Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{3a_n}\right) \text{ với mọi n = 1, 2, 3, …}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $A_n = \dfrac{3}{3a_n^2 - 1}$ là một số chính phương và nó có ít nhất n ước nguyên tố phân biệt.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2007

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Cho hai tập hợp A,B là tập hợp các số nguyên dương thỏa mãn $|A|=|B|=n$ (với n là số nguyên dương) và có tổng các phần tử bằng nhau. Xét bảng ô vuông $n\times n$.

Chứng minh rằng ta có thể điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i/ Tổng của các phần tử ở mỗi hàng là các phần tử của tập A.

ii/ Tổng của các phần tử ở mỗi cột là các phần tử của tập B.

iii/ Có ít nhất $(n-1)^2+k$ số 0 trong bảng với k là số các phần tử chung của A và B.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn nội tiếp I. Gọi (k_a) là đường tròn có tâm nằm trên đường cao của góc A, đi qua điểm A và tiếp xúc trong với đường tròn (I) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự .

1/ Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại P.

2/ Gọi $(J_a),(J_b),(J_c)$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC qua trung điểm BC, CA, AB.
Chứng minh P là tâm đẳng phương của 3 đường tròn nói trên.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$S=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}.$$

Ngày thi thứ hai.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)=f(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}) \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Bài 5. Cho A là tập con chứa 2007 phần tử của tập: $\{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 4013,\ 4014\}$ thỏa mãn với mọi $a,b\in A$ thì a không chia hết cho b. Gọi m_A là phần tử nhỏ nhất của A.

Tìm giá trị nhỏ nhất của m_A với A thỏa mãn các điều kiện trên.

Bài 6. Cho đa giác 9 cạnh đều (H). Xét ba tam giác với các đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) đã cho sao cho không có hai tam giác nào có chung đỉnh.
Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi tam giác 1 cạnh sao cho 3 cạnh này bằng nhau.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2008

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Trong mặt phẳng cho góc xOy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy. Gọi d là đường phân giác góc ngoài của góc xOy và I là giao điểm của trung trực MN với đường thẳng d. Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng d sao cho $IM = IN = IP = IQ$, giả sử K là giao điểm của MQ và NP.

1. Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.
2. Gọi d_1 là đường thẳng vuông góc với IM tại M và d_2 là đường thẳng vuông góc với IN tại N. Giả sử các đường thẳng d_1, d_2 cắt đường thẳng d tại E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.

Bài 2. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho tồn tại các đa thức với hệ số thực $P(x), Q(x), R(x,y)$ thỏa mãn điều kiện:

Với mọi số thực a, b mà $a^m - b^2 = 0$, ta luôn có $P(R(a,b)) = a$ và $Q(R(a,b)) = b$.

Bài 3. Cho số nguyên n > 3. Kí hiệu T là tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên. Một tập con S của T được gọi là tập khuyết trong T nếu S có tính chất: Tồn tại số nguyên dương c không vượt quá $\frac{n}{2}$ sao cho với s_1, s_2 là hai số bất kì thuộc S ta luôn có $|s_1 - s_2| \neq c$.

Hỏi tập khuyết trong T có thể có tối đa bao nhiêu phần tử ?

Ngày thi thứ hai.

Bài 4. Cho m, n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng $(2m+3)^n + 1$ chia hết cho 6m khi và chỉ khi $3^n + 1$ chia hết cho 4m.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác. Trên các đường thẳng AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho $\frac{AL}{AD} = \frac{BM}{BE} = \frac{CN}{CF} = k$ (k là một hằng số dương).

Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M, tiếp xúc với OB tại B và đi qua N, tiếp xúc với OC tại C.

1. Chứng minh rằng với $k = \frac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung và đường thẳng nối hai điểm chung đó đi qua trọng tâm tam giác ABC.
2. Tìm tất cả các giá trị k sao cho 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.

Bài 6. Kí hiệu M là tập hợp gồm 2008 số nguyên dương đầu tiên. Tô tất cả các số thuộc M bởi ba màu xanh, vàng, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu và mỗi màu đều được dùng để tô ít nhất một số. Xét các tập hợp sau:

$S_1 = \{(x,y,z) \in M^3$, trong đó x, y, z có cùng màu và $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$;

$S_2 = \{(x,y,z) \in M^3$, trong đó x, y, z đôi một khác màu và $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$.

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$. (Kí hiệu M^3 là tích Đề - các $M \times M \times M$) .

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2009

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 lần lượt là các chân đường cao của tam giác ABC hạ từ các đỉnh A, B, C và các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2$ với (O).

Chứng minh rằng: A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Bài 2. Cho đa thức $P(x) = rx^3 + qx^2 + px + 1$ trong đó p, q, r là các số thực và $r > 0$.

Xét dãy số (a_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = -p, \ a_3 = p^2 - q \\ a_{n+3} = -p.a_{n+2} - q.a_{n+1} - r.a_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: nếu đa thức $P(x)$ có một nghiệm thực duy nhất và không có nghiệm bội thì dãy số (a_n) có vô số số âm.

Bài 3. Cho các số nguyên dương a, b sao cho a, b và ab đều không phải là số chính phương. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau:

$$ax^2 - by^2 = 1$$

$$ax^2 - by^2 = -1$$

có ít nhất một phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Ngày thi thứ hai.

Bài 4. Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương:

$$\left(r + \frac{a}{b+c}\right)\left(r + \frac{b}{c+a}\right)\left(r + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3$$

Bài 5. Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm bất kì nằm trong (O), M không nằm trên AB. Gọi N là giao điểm của phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M.

Chứng minh rằng: đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.

Bài 6. Một hội nghị toán học có tất cả $6n + 4$ nhà toán học phải họp với nhau đúng $2n + 1$ lần $(n \geq 1)$. Mỗi lần họp, họ ngồi quanh một cái bàn 4 chỗ và n cái bàn 6 chỗ, các vị trí ngồi chia đều khắp mỗi bàn. Biết rằng hai nhà toán học đã ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp này thì sẽ không được ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp khác.

a/ Chứng minh rằng Ban tổ chức có thể xếp được chỗ ngồi nếu $n = 1$.

b/ Hỏi rằng Ban tổ chức có thể sắp xếp được chỗ ngồi được hay không với mọi $n > 1$?

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 2010

* ***Ngày thi thứ nhất.***

Bài 1. Cho tam giác ABC không vuông tại A có đường trung tuyến AM. Gọi D là một điểm di động trên đường thẳng AM. Gọi (O_1), (O_2) là các đường tròn đi qua D, tiếp xúc với BC lần lượt tại B và C. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn (O_1), đường thẳng AC với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng:

1. Tiếp tuyến tại P của (O_1) và tiếp tuyến tại Q của (O_2) phải cắt nhau tại một điểm. Gọi giao điểm đó là S.
2. Điểm S luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định khi D di động trên AM.

Bài 2. Với mỗi số n nguyên dương, xét tập hợp sau :

$$T_n = \left\{11(k+h) + 10(n^k + n^h) \mid 1 \le k, h \le 10\right\}.$$

Tìm tất cả giá trị của n sao cho không tồn tại $a, b \in T_n$; $a \neq b$ sao cho $(a-b)$ chia hết cho 110.

Bài 3. Gọi một hình chữ nhật có kích thước 1×2 là hình chữ nhật đơn và một hình chữ nhật có kích thước 2×3, bỏ đi 2 ô ở góc chéo nhau (tức là có 4 ô vuông nhỏ) là hình chữ nhật kép. Người ta ghép khít các hình chữ nhật đơn và hình chữ nhật kép này lại với nhau được một bảng hình chữ nhật có kích thước là 2008×2010.
Tìm số bé nhất các hình chữ nhật đơn có thể dùng để ghép.

* ***Ngày thi thứ hai.***

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $16(a+b+c) \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3} + \frac{1}{(b+c+\sqrt{2(b+a)})^3} + \frac{1}{(c+a+\sqrt{2(c+b)})^3} \le \frac{8}{9}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 5: Trong một hội nghị có n nước tham gia, mỗi nước có k đại diện $(n > k > 1)$.
Người ta chia $n.k$ người này thành n nhóm, mỗi nhóm có k người sao cho không có hai người nào cùng nhóm đến từ cùng một nước.
Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm gồm n người sao cho họ thuộc các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Bài 6: Gọi S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của nhị thức $(1+x)^n$, trong đó n là số nguyên dương; x là số thực bất kì.
Chứng minh rằng: $S_{2n} + 1$ không chia hết cho 3 với mọi n.

PHẦN II

*****

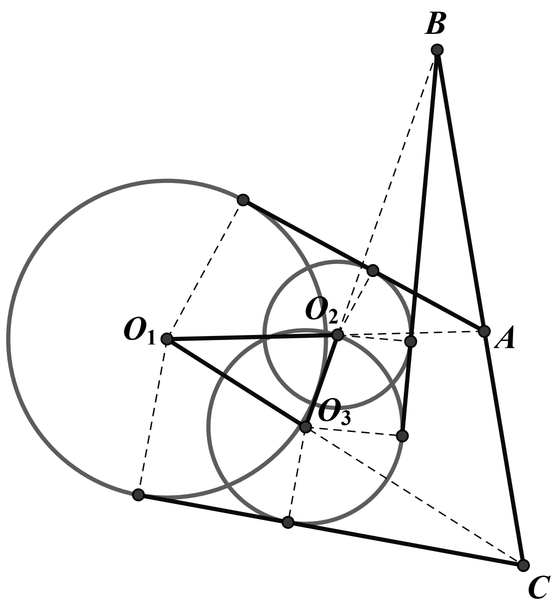
LỜI GIẢI

LỜI GIẢI ĐỀ THI

CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2005

<u>Bài 1</u>. Cho tam giác ABC có (I) và (O) lần lượt là các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi ω_A, ω_B, ω_C lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (I) và (O) lần lượt tại các điểm D, K (với đường tròn ω_A); tại E, M (với đường tròn ω_B) và tại F, N (với đường tròn ω_C). Chứng minh rằng:

1. ***Các đường thẳng DK, EM, FN đồng quy tại P.***
2. ***Trực tâm của tam giác DEF nằm trên đoạn OP.***



1. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có bán kính đôi một khác nhau; A, B, C lần lượt là tâm vị tự của các cặp đường tròn (O_1) và (O_2), (O_2) và (O_3), (O_3) và (O_1).

Chứng minh rằng nếu trong các tâm vị tự đó, có ba tâm vị tự ngoài hoặc hai tâm vị tự trong, một tâm vị tự ngoài thì A, B, C thẳng hàng.

*Chứng minh:

Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính của các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$, các giá trị R_1, R_2, R_3 này đôi một khác nhau.

Theo tính chất về tâm vị tự, ta có: $\dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{AO_2}} = (-1)^a \dfrac{R_1}{R_2}$.

Tương tự: $\dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{BO_3}} = (-1)^b \dfrac{R_2}{R_3}$, $\dfrac{\overline{CO_3}}{\overline{CO_1}} = (-1)^c \dfrac{R_3}{R_1}$, trong đó, mỗi số a, b, c nhận giá trị là 0 (khi nó là tâm vị tự ngoài) hoặc 1 (khi nó là tâm vị tự trong).

Theo giả thiết trong a, b, c có ba giá trị là 0 hoặc hai giá trị 0, một giá trị 1. Từ đó: $\dfrac{\overline{AO_1}}{\overline{AO_2}} \cdot \dfrac{\overline{BO_2}}{\overline{BO_3}} \cdot \dfrac{\overline{CO_3}}{\overline{CO_1}} = 1$, theo định lí Menelaus đảo cho tam giác $O_1O_2O_3$, ta có: A, B, C thẳng hàng.

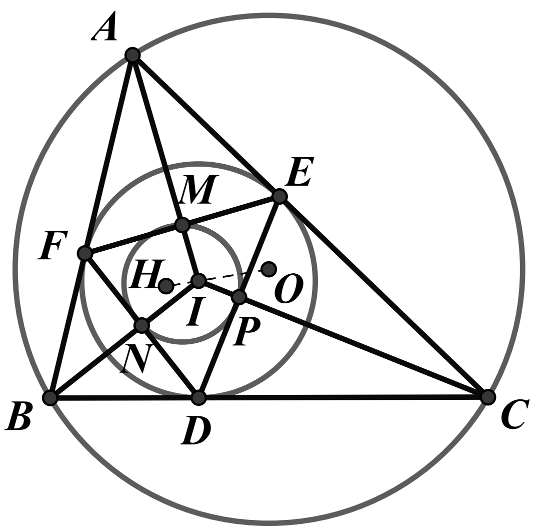
Bổ đề được chứng minh.

***Trở lại bài toán:**

Gọi P’ là tâm vị tự trong của hai đường tròn (O) và (I). Dễ thấy: D là điểm tiếp xúc ngoài của ω_A và (I) nên cũng chính là tâm vị tự trong của hai đường tròn này; K là điểm tiếp xúc trong của hai đường tròn ω_A và (O) nên là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn này. Theo bổ đề trên thì P', D, K thẳng hàng hay đường thẳng DK đi qua P’. Tương tự, các đường thẳng EM và FN cũng đi qua P’; tức là ba đường thẳng DK, EM, FN đồng quy và điểm P’ chính là điểm P của đề bài.

2. Ta chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác ABC có (O), (I) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác ABC. Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OI.



* Chứng minh:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn EF, FD, DE. Dễ thấy AI là trung trực của đoạn EF nên M thuộc đường thẳng AI hay A, M, I thẳng hàng. Tương tự: B, N, I và C, P, I cũng thẳng hàng. Xét phép nghịch đảo Φ tâm I, phương tích r^2 với r là bán kính đường tròn (I).

Dễ thấy: tam giác IEA vuông tại E có EM là đường cao nên: $IM.IA = IE^2 = r^2$, suy ra: $\Phi: M \to A$. Tương tự: $\Phi: N \to B, P \to C$.

Do đó: $\Phi: \Delta MNP \to \Delta ABC$. Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP thì $\Phi: E \to O$, suy ra: E, I, O thẳng hàng.

Hơn nữa, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP cũng chính là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF này nên E, I, H thẳng hàng.

Từ đó suy ra H, I, O thẳng hàng. Bổ đề được chứng minh.

*** Trở lại bài toán:**

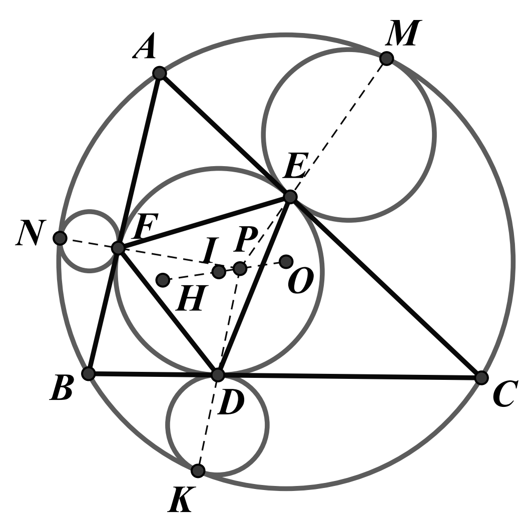
Gọi H là trực tâm tam giác DEF thì theo bổ đề trên: H, I, O thẳng hàng.

Theo câu 1/, điểm P nằm trên đoạn OI.

Suy ra: 4 điểm H, I, P, O thẳng hàng.

Từ đó suy ra trực tâm H của tam giác DEF nằm trên đường thẳng OI.

Ta có đpcm.



***<u>Bài 2.</u>* Trên một vòng tròn có n chiếc ghế được đánh số từ 1 đến n. Người ta chọn ra k chiếc ghế. Hai chiếc ghế được chọn gọi là kề nhau nếu đó là hai chiếc ghế được chọn liên tiếp. Hãy tính số cách chọn ra k chiếc ghế sao cho giữa hai chiếc ghế kề nhau, không có ít hơn 3 chiếc ghế khác.**

*Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Cho n điểm phân biệt nằm trên đường thẳng được tô một trong hai màu, xanh hoặc đỏ thỏa mãn các điều kiện sau:

- *Có đúng k điểm được tô màu xanh.*
- *Giữa hai điểm màu xanh liên tiếp có ít nhất p điểm được tô màu đỏ (tính từ trái sang).*
- *Ở bên phải điểm màu xanh cuối cùng có ít nhất p điểm được tô màu đỏ.*

Khi đó, số cách tô màu là: C_{n-kp}^{k}.

*Chứng minh: Đánh số các điểm đã cho là $1,2,3,...,n$. Đặt tương ứng mỗi cách tô màu với một bộ k các số nguyên dương $(i_1,i_2,...,i_k)$ trong đó $i_1,i_2,...,i_k$ là các điểm được tô màu xanh. Dễ thấy tương ứng nói trên chính là một song ánh từ tập các cách tô màu đến tập hợp T sau:

$T=\{(i_1,i_2,...,i_k)\,|\,i_s\in\{1,2,...,n-p\},\forall s=\overline{1,k};\ i_{s+1}-i_s>p,\forall i=\overline{1,k-1}\}$.

Xét ánh xạ sau:

$T\to T'=\{(j_1,j_2,...,j_k)\,|\,j_t\in\{1,2,...,n-kp\},\ j_{t+1}>j_t,\forall t=\overline{1,k}\}$.

Ta sẽ chứng minh ánh xạ này là một song ánh.

Thật vậy:

*Xét một bộ $(j_1,j_2,...,j_k)\in T'$. Khi đó, ta xét tiếp bộ: $(j_1,j_2+p,j_3+2p,...,j_k+(k-1)p)$.

Do $1\le j_t\le n-kp$ nên phần tử lớn nhất của bộ này là $j_k+(k-1)p$ có giá trị không vượt quá $n-kp+(k-1)p=n-p$. Từ đó suy ra: $j_t+(t-1)p\in\{1,2,...,n-kp\},\forall t\ge 1$.

Hơn nữa: $[j_{t+1}+tp]-[j_t+(t-1)p]=(j_{t+1}-j_t)+p>p$.

Từ đó suy ra bộ $(j_1,j_2+p,j_3+2p,...,j_k+(k-1)p)\in T$.

Do đó, tương ứng này là một toàn ánh.

*Xét bộ $(i_1,i_2,...,i_k)\in T$. Khi đó, hoàn toàn tương tự trên, ta cũng chứng minh được bộ $(i_1,i_2-p,i_2-2p,...,i_k-(k-1)p)\in T'$.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu có hai bộ khác nhau $(i_1,i_2,...,i_k),(i'_1,i'_2,...,i'_k)\in T$ thì các bộ tương ứng thuộc T=T' của chúng cũng phải khác nhau. Nhưng điều này là hiển nhiên do hai bộ này là khác nhau nên tồn tại chỉ số s sao cho $i_s\ne i'_s$, khi đó $i_s-(s-1)p\ne i'_s-(s-1)p$.

Suy ra, tương ứng này cũng là một đơn ánh.

Vậy tương ứng $T\to T'$ là một song ánh.

Nhận xét trên được chứng minh.

Do đó: $|T|=|T'|=C_{n-kp}^{k}$. Bổ đề được chứng minh.

***Trở lại bài toán:**

Ta xét tổng quát giá trị 3 trong đề bài bởi giá trị p tương ứng với bổ đề trên. Đánh số các ghế trong đề bài theo chiều kim đồng hồ là $A_1, A_2, ..., A_n$ (xem như là các điểm nằm trên một vòng tròn) ; mỗi ghế được chọn xem như được tô màu xanh và không được chọn xem như được tô màu đỏ; gọi X là tập hợp tất cả các cách tô màu k điểm trong n điểm đã cho thỏa mãn đề bài.

Xét phân hoạch: $X = X' \cup X'' \Rightarrow |X| = |X'| + |X''|$.

trong đó X' là cách tô màu thỏa mãn có một điểm được tô màu xanh thuộc $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_p\}$ và $X'' = X \setminus X'$, khi đó rõ ràng, với mọi phần tử thuộc X'' thì không có điểm nào được tô màu xanh thuộc $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_p\}$, tức là mọi điểm trong tập này đều được tô màu đỏ. Ta cắt đường tròn ngay tại điểm A_p, A_{p+1} thì rõ ràng sẽ tạo được một đường thẳng thỏa mãn tất cả điều kiện của bổ đề đã nêu ở trên, suy ra: $|X''| = C_{n-kp}^k$. Ta chỉ còn cần tính số phần tử của X'.

Xét tập hợp X'_i trong đó mỗi phần tử của X'_i có đúng một điểm A_i được tô màu xanh, $i = \overline{1, p}$; khi đó rõ ràng $X'_i \cap X'_j = \varnothing, \forall i \neq j$ và $\bigcup_{i=1}^{p} X'_i = X'$.

Với mỗi $i = \overline{1, p}$, theo bổ đề trên, ta thấy:

$C_{n-1-p-(k-1)p}^{k-1} = C_{n-kp-1}^{k-1}$, tức là các tập X'_i này có cùng số phần tử. Suy ra: $|X'| = pC_{n-kp-1}^{k-1}$.

Do đó: $|X| = |X'| + |X''| = C_{n-kp}^k + pC_{n-kp-1}^{k-1}$.

Thay $p = 3$, ta được số cách chọn ghế tương ứng trong đề bài là $C_{n-3k}^k + 3C_{n-3k-1}^{k-1}$.

Vậy số cách chọn ghế thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài là: $C_{n-3k}^k + 3C_{n-3k-1}^{k-1}$.

<u>Bài 3.</u> Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^3+y^3+z^3)=(f(x))^3+(f(y))^3+(f(z))^3$$

* Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Với mọi số nguyên dương lớn hơn 10, lập phương của nó đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 5 lập phương của các số nguyên khác có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nó.

* Thật vậy:

Ta cần tìm mối liên hệ đó với số $n > 10$ trong từng trường hợp n chẵn và n lẻ.

- Với n là số lẻ, đặt $n=2k+1$.

Ta cần tìm một đẳng thức đúng với mọi k mà trong đó $2k+1$ là biểu thức có giá trị tuyệt đối lớn nhất, các biểu thức còn lại phải là nhị thức bậc nhất có hệ số của k lớn nhất là 2. Khi đó để khử $8k^3$ xuất hiện ở trong $(2k+1)^3$, ta chọn $-(2k-1)^3$; ta thấy vẫn còn số hạng chứa k bậc hai trong đó, ta chọn tiếp hai biểu thức khác có chứa k cùng hai hằng số bằng cách dùng tham số như sau:

Giả sử hai biểu thức cần tìm có dạng $(ak+b),(ak-b);\ a,b\in\mathbb{Z}$ và hai số cần tìm là $c,d\in\mathbb{Z}$, tức là:

$$\left[(2k+1)^3-(2k-1)^3\right]=\left[(ak+b)^3-(ak-b)^3\right]+\left[c^3+d^3\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(24k^2+2\right)=\left(6a^2bk^2+2b^3\right)+\left(c^3+d^3\right)$$

$$\Leftrightarrow k^2(24-6a^2b)+(2-2b^3-c^3-d^3)=0$$

Ta cần chọn a,b,c,d sao cho $a^2b=4,\ 2b^3+c^3+d^3=2$ trong đó $a\le 2$.

Dễ thấy $a\ne 2$ vì nếu $a=2$ thì từ $a^2b=4\Rightarrow b=1$, trùng với biểu thức cần đánh giá; do đó, $a=1,b=4$, suy ra: $c^3+d^3=-126$, ta chọn được $c=-5,\ d=-1$.

Do đó:

$$(2k+1)^3=(2k-1)^3+(k+4)^3+(4-k)^3+(-5)^3+(-1)^3 \qquad (1)$$

Thử lại, ta thấy biểu thức này đúng với mọi k.

- Với n là số chẵn, đặt $n=2k+2$.

Lập luận hoàn toàn tương tự, ta có được đẳng thức sau:

$$(2k+2)^3=(2k-2)^3+(k+8)^3+(8-k)^3+(-10)^3+(-2)^3 \qquad (2)$$

Bổ đề được chứng minh.

***Trở lại bài toán:**

Trong đẳng thức đã, thay $x=y=z=0$, ta được:

$$f(0)=3f^3(0)\Leftrightarrow f(0)=0\vee 3f^2(0)=1.$$

Do hàm này chỉ lấy giá trị trên $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ nên không thể có $3f^2(0)=1$, tức là $f(0)=0$.

- Thay $y = z = 0$, ta có: $f(x^3) = (f(x))^3 + (f(0))^3 + (f(0))^3 = (f(x))^3$.
- Lại thay $y = -z$, ta có:

$f(x^3) = (f(x))^3 + (f(y))^3 + (f(-y))^3 \Leftrightarrow (f(y))^3 + (f(-y))^3 = 0 \Leftrightarrow f(y) = -f(-y), \forall y \in \mathbb{Z}$.

Ta sẽ chứng minh rằng: $\forall k \in \mathbb{Z} : f(k) = k.f^3(1)$ bằng quy nạp. (*)

*Thật vậy:

- Với $k = 1$, trong giả thiết, thay $x = 1,\ y = z = 0$, ta có $f(1) = f^3(1) \Rightarrow f(-1) = -f^3(1)$
- Với $k = 2$, trong giả thiết, thay $x = y = 1, z = 0$, ta có $f(2) = 2f^3(1) \Rightarrow f(-2) = -2f^3(1)$
- Với $k = 3$, trong giả thiết, thay $x = y = z = 1$, ta có $f(3) = 3f^3(1) \Rightarrow f(-3) = -3f^3(1)$
- Thay $x = 2, y = z = 0$, ta có $f(8) = f^3(2) = (2f(1))^3 = 8f^3(1) \Rightarrow f(-8) = -8f^3(1)$.
- Thay $x = 2, y = 1, z = 0$, ta có $f(9) = f^3(2) + f^3(1) = 9f^3(1) \Rightarrow f(-9) = -9f^3(1)$.
- Thay $x = 2, y = z = 1$, ta có: $f(10) = f^3(2) + 2f^3(1) = 10f^3(1) \Rightarrow f(-10) = -10f^3(1)$.
- Thay $x = 2, y = -1, z = 0$, ta có: $f(7) = f^3(2) - f^3(1) = 7f^3(1) \Rightarrow f(-7) = -7f^3(1)$.
- Thay $x = 2, y = z = -1$, ta có: $f(6) = f^3(2) - 2f^3(1) = 6f^3(1) \Rightarrow f(-6) = -6f^3(1)$.
- Trong đẳng thức (1) của bổ đề trên, ta thay $k = 2$, suy ra:

  $5^3 = 3^3 + 6^3 + 2^3 + (-5)^3 + (-1)^3$ hay $f(5^3 + 5^3 + 1^3) = f(3^3 + 6^3 + 2^3)$.

$\Rightarrow 2f^3(5) + f(1^3) = f^3(3) + f^3(6) + f^3(2) \Rightarrow f(5) = 5f^3(1) \Rightarrow f(-5) = -5f^3(1)$.

- Trong đẳng thức (2) của bổ đề trên, ta thay $k = 1$, suy ra:

  $4^3 = 0^3 + 9^3 + 7^3 + (-10)^3 + (-2)^3$ hay $f(4^3 + 10^3 + 2^3) = f(9^3 + 7^3 + 0^3)$.

  $\Rightarrow f^3(4) + f^3(10) + f^3(2) = f^3(9) + f^3(7) + f^3(0) \Rightarrow f(4) = 4f^3(1) \Rightarrow f(-4) = -4f^3(1)$.

Như thế, ta đã chứng minh được (*) đúng với mọi $|k| \le 10$.

Với $|k| > 10$, xét $k > 0$ thì theo bổ đề ở trên, lập phương của k đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 5 lập phương khác có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn nó.

Hơn nữa, dễ thấy rằng với $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$ thỏa $a^3 + b^3 + c^3 = m^3 + n^3 + p^3$ và ta đã có: $f(b) = bf^3(1), f(c) = cf^3(1), f(m) = mf^3(1), f(n) = nf^3(1), f(p) = pf^3(1)$ thì $f(a) = af^3(1)$.

Từ đó, suy ra $f(k) = kf^3(1), \forall k > 10$.

Với $k < -10$ thì $f(k) = -f(-k) = -(-kf^3(1)) = kf^3(1)$.

Do đó, theo nguyên lí quy nạp (*) được chứng minh.

Mặt khác, trong giả thiết đã cho, thay $x = 1, y = z = 0$, ta có: $f(1) = f^3(1) \Leftrightarrow f(1) = \pm 1 \vee f(1) = 0$.

- Nếu $f(1) = -1$ thì $f(k) = -k, \forall k \in \mathbb{Z}$, thử lại thấy thỏa.
- Nếu $f(1) = 0$ thì $f(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, thử lại thấy thỏa.
- Nếu $f(1) = 1$ thì $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{Z}$, thử lại thấy thỏa.

Vậy tất cả hàm số cần tìm là $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{Z}$; $f(k) = -k, \forall k \in \mathbb{Z}$ và $f(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

<u>Bài 4</u>. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\ge\frac{3}{8}$$

trong đó a,b,c ***là các số thực dương.***

*Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

"Nếu a,b,c,d *là các số thực dương có tích bằng 1 thì:*

$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$*."*

Thật vậy:

Ta thấy với hai số thực dương tùy ý thì: $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{2}{1+xy}$ (*)

$(*)\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2+(y+1)^2}{(xy+x+y+1)^2}\ge\frac{1}{1+xy}\Leftrightarrow\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right](1+xy)\ge(xy+x+y+1)^2$

$\Leftrightarrow(x^2+y^2+2x+2y+2)(1+xy)\ge(xy+x+y)^2+2(xy+x+y)+1$

$\Leftrightarrow(x^2+y^2+2x+2y+2)+(x^3y+xy^3+2x^2y+2xy^2+2xy)\ge$

$\ge(x^2y^2+x^2+y^2+2x^2y+2xy^2+2xy)+(2xy+2x+2y)+1$

$\Leftrightarrow 1+xy(x^2+y^2)\ge 2xy+x^2y^2\Leftrightarrow xy(x-y)^2+(1-xy)^2\ge 0$

Do đó:

$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}=\frac{2+ab+cd}{1+ab+cd+abcd}=\frac{2+ab+cd}{2+ab+cd}=1.$

Do đó bổ đề được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Trong bổ đề trên, thay $a=x,b=y,c=z,d=1$, ta có kết quả sau:

Với x, y, z là các số thực dương và $xyz=1$ thì:

$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

***Trở lại bài toán đã cho:**

Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}\Rightarrow x,y,z>0;\ xyz=1$.

BĐT đã cho ban đầu tương đương với:

$\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^3}+\frac{1}{(1+\frac{c}{b})^3}+\frac{1}{(1+\frac{a}{c})^3}\ge\frac{3}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\ge\frac{3}{8}$.

Theo BĐT Cauchy cho các số dương, ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{8.(1+x)^6}}=\frac{3}{2}.\frac{1}{(1+x)^2}\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^3}\ge \frac{3}{4}.\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{16}.$$

Hoàn toàn tương tự:

$$\frac{1}{(1+y)^3}\ge \frac{3}{4}.\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{1}{16},\ \frac{1}{(1+z)^3}\ge \frac{3}{4}.\frac{1}{(1+z)^2}-\frac{1}{16}.$$

Cộng từng vế các BĐT này lại, ta được:

$$\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\ge \frac{3}{4}.\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]-\frac{3}{16}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{4}.\left[\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right]-\frac{3}{16}\ge \frac{3}{8}\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\ge \frac{3}{4}$$

với x, y, z thỏa mãn các điều kiện đã nêu. (**)

Theo bổ đề trên thì (**) đúng.

Vậy ta có đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 5. ***Cho số nguyên tố*** $p(p>3)$***. Tính:***

a. $S=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)$ ***nếu*** $p\equiv 1 \pmod 4$.

b. $P=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{k^2}{p}\right]$ ***nếu*** $p\equiv 1 \pmod 8$.

*Trước hết, ta sẽ chứng minh hai bổ đề sau:

(1) Bổ đề 1: Với p là số nguyên tố thỏa $p\equiv 1 \pmod 4$ thì mỗi số tự nhiên a với: $1\le a\le \frac{p-1}{2}$ sẽ tồn tại duy nhất số tự nhiên b thỏa $\frac{p+1}{2}\le b\le p-1$ và: $a^2+b^2\equiv 0 (\bmod p)$.

*Chứng minh: Theo định lí Wilson: $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$.

Với mỗi $k=1,2,3,...,\frac{p-1}{2}$, ta thấy: $p-k\equiv -k(\bmod p)\Rightarrow k(p-k)\equiv -k^2(\bmod p)$.

Kết hợp với giả thiết $p\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow \frac{p-1}{2}\vdots 2$, ta được:

$-1\equiv (p-1)!\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}.\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2\equiv\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2(\bmod p)$. Đặt $\varphi=\left(\frac{p-1}{2}\right)!\Rightarrow \varphi^2\equiv -1(\bmod p)$.

Với mỗi $1\le a\le\frac{p-1}{2}$, ta chọn $\frac{p+1}{2}\le b\le p-1$ thỏa $b^2\equiv a^2.\varphi^2(\bmod p)$, dễ thấy b tồn tại và duy nhất. Khi đó: $a^2+b^2\equiv a^2(1+\varphi^2)\equiv 0(\bmod p)$. Bổ đề được chứng minh.

(2) Bổ đề 2:

Với x là số thực bất kì thì $[2x]-2[x]$ *bằng 1 nếu* $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$ *và bằng 0 nếu* $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$.

*Chứng minh: Ta có: $x=[x]+\{x\}$. Suy ra:

$[2x]-2[x]=[2[x]+2\{x\}]-2[[x]+\{x\}]=[2\{x\}]-2[\{x\}]=[2\{x\}]$. Do đó:

-Nếu $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$ thì $1\le 2\{x\}<2\Rightarrow[2\{x\}]=1\Rightarrow[2x]-2[x]=1$.

- Nếu $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$ thì $0\le 2\{x\}<1\Rightarrow[2\{x\}]=0\Rightarrow[2x]-2[x]=0$.

Bổ đề được chứng minh. ***Trở lại bài toán:**

1. Ta thấy tổng đã cho là: $S=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)$ có đúng $\frac{p-1}{2}$ số hạng.

Theo bổ đề 2 thì mỗi số hạng trong tổng đó nhận hai giá trị là 0 hoặc 1. (1)

Theo bổ đề 1 thì với mỗi số tự nhiên a thỏa $1\le a\le\frac{p-1}{2}$ thì tồn tại duy nhất số tự nhiên b thỏa $\frac{p+1}{2}\le b\le p-1$ sao cho $a^2+b^2\equiv 0(\bmod p)\Rightarrow a^2+(p-b)^2\equiv 0(\bmod p)$; do đó, tồn tại duy nhất số tự nhiên a' thỏa $1\le a'\le\frac{p-1}{2}$ sao cho $a^2+a'^2\equiv 0(\bmod p)$.

Gọi x,y lần lượt là số các số dư của phép chia k^2 cho p ($1\le k\le\frac{p-1}{2}$) có giá trị lớn hơn $\frac{p-1}{2}$ và nhỏ hơn $\frac{p-1}{2}$. Theo nhận xét trên thì $x=y$, hơn nữa $x+y=\frac{p-1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{p-1}{4}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $S=x.1+y.0=\frac{p-1}{4}$.

Do đó, tổng cần tìm là $\frac{p-1}{4}$.

2. Do $p\equiv 1\ (\bmod 8)$ nên tồn tại a sao cho $a^2\equiv 2(\bmod p)$.
(ta cũng thấy rằng $p\equiv 1\ (\bmod 8)\Rightarrow p\equiv 1\ (\bmod 4)$).

Ta có: $P=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{k^2}{p}\right]=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)-\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-2\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)-S$.

Ta cần tính:

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{2k^2}{p}-\frac{k^2}{p}\right)-\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\}-\left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right)=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{k^2}{p}\right)-\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\}-\left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right),$$

trong đó $p\equiv 1\ (\bmod 8)$.

Theo nhận xét trên thì tập hợp các số dư khi chia $k^2, 1\le k\le\frac{p-1}{2}$ cho p trùng với tập hợp các số dư khi chia $2k^2, 1\le k\le\frac{p-1}{2}$ cho p, tức là: $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left\{\frac{2k^2}{p}\right\}-\left\{\frac{k^2}{p}\right\}\right)=0$, suy ra:

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\left[\frac{2k^2}{p}\right]-\left[\frac{k^2}{p}\right]\right)=\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{k^2}{p}\right)=\frac{p^2-1}{24}.$$

Vậy $P=\frac{p^2-1}{24}-\frac{p-1}{4}=\frac{(p-1)(p-5)}{24}$.

<u>Bài 6</u>. Một số nguyên dương được gọi là "số kim cương 2005" nếu trong biểu diễn thập phân của nó có 2005 số 9 đứng cạnh nhau liên tiếp. Dãy $\left(a_n\right), n=1,2,3,...$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương thỏa mãn $a_n < nC$ (C là hằng số thực dương nào đó).

Chứng minh rằng dãy số $\left(a_n\right)$, $n=1,2,3,...$ chứa vô hạn "số kim cương 2005".

Trước hết, ta sẽ chứng minh các bổ đề sau:

(1) $\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=+\infty$.

(2) Nếu trong hệ cơ số m $(m\in\mathbb{N}, m>1)$: dãy số (a_n) tăng và trong dãy đó không có số hạng nào có chứa chữ số $m-1$ thì tổng sau $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ hội tụ khi n tiến tới vô cực.

*Chứng minh bổ đề (1):

Ta cần chứng minh BĐT: $x>\ln(x+1),\ \forall x>0$. Thật vậy:

Xét hàm số: $f(x)=x-\ln(x+1),\ x>0\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0,\forall x>0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra: $f(x)>f(0)=0\Rightarrow x>\ln(x+1),\ \forall x>0$.

Trong BĐT này, thay x bởi $\frac{1}{x}>0$, ta cũng có:

$\frac{1}{x}>\ln(\frac{1}{x}+1)\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\ln(\frac{x+1}{x})\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\ln(x+1)-\ln x,\forall x>0$. Áp dụng vào tổng cần chứng minh:

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}>\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(n+1)-\ln(n)\right]=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$, mà $\lim\left[\ln(n+1)\right]=+\infty$ nên:

$\lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=+\infty$. Bổ đề được chứng minh.

*Chứng minh bổ đề (2):

Đặt $s_k=\sum\frac{1}{n}$ là tổng các số tự nhiên có chứa k chữ số viết trong hệ cơ số m và không có chứa chữ số $m-1$ nào.

Giả sử một số hạng có k chữ số nào đó có dạng: $\overline{b_1b_2...b_{k-1}b_k}$, chữ số thứ 1 phải khác 0 và khác $m-1$ nên có $m-2$ cách chọn, các chữ số còn lại phải khác $m-1$ nên có $m-1$ cách chọn. Do đó, có đúng $(m-2).(m-1)^{k-1}$ số có k chữ số mà trong biểu diễn trong hệ cơ số m không có chứa chữ số $m-1$, mà mỗi số trong đó đều lớn hơn m^{k-1} nên tổng nghịch đảo tương ứng của chúng sẽ bé hơn $\frac{(m-2).(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}}$.

Hơn nữa: $s_k = \sum \frac{1}{n}$ là tổng các số hạng có chứa k chữ số trong hệ số m và không có chứa chữ số $m-1$ nào nên nó không vượt quá tổng của tất cả các số tự nhiên có cùng dạng đó mà ta vừa đánh giá được, suy ra: $s_k < \frac{(m-2).(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}}$.

Do đó:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \lim \sum_{k=1}^{n} s_k < \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{(m-2).(m-1)^{k-1}}{m^{k-1}} = \lim \sum_{k=1}^{n} (m-2).(\frac{m-1}{m})^{k-1} = \frac{m-2}{1-\frac{m-1}{m}} = m(m-2).$$

Tức là tổng này hội tụ khi n tiến tới vô cực. Bổ đề (2) được chứng minh.

***Trở lại bài toán:**

Đặt $m = 10^{2005} \Rightarrow m-1$ là số tự nhiên có chứa đúng 2005 số 9 liên tiếp khi viết trong hệ thập phân.

Ta cần chứng minh trong dãy đã cho, có vô số số hạng chứa chữ số $m-1$.

Giả sử trong dãy này không có chứa số hạng nào có chữ số $m-1$. Khi đó, theo bổ đề (2) ở trên: $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ là hữu hạn.

Hơn nữa, theo giả thiết: $a_n < nC, \forall n$ nên $\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} > \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{nC} = \frac{1}{C}.\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$. Theo bổ đề (1), giới hạn này tiến tới vô cực. Hai điều này mâu thuẫn với nhau chứng tỏ điều giả sử ở trên là sai, tức là dãy đã cho có ít nhất một số hạng chứa chữ số $m-1$, giả sử đó là: a_{n_0}.

Ta lại xét dãy con của dãy ban đầu: $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, ...$

Dãy này có đầy đủ tính chất của dãy đã cho nên cũng chứa ít nhất một số hạng có chứa chữ số $m-1$ khác với số a_{n_0} ở trên (do đây là dãy tăng).

Lập luận tương tự như thế, dãy con này có thêm một số hạng có chứa chữ số $m-1$.

Từ đó suy ra dãy đã cho có vô số số hạng chứa chữ số $m-1$.

Vậy dãy số $(a_n), n = 1, 2, 3, ...$ chứa vô hạn "*số kim cương 2005*". Đây chính là đpcm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

DỰ THI IMO 2006

***Bài 1**. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K.*
Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn BC.

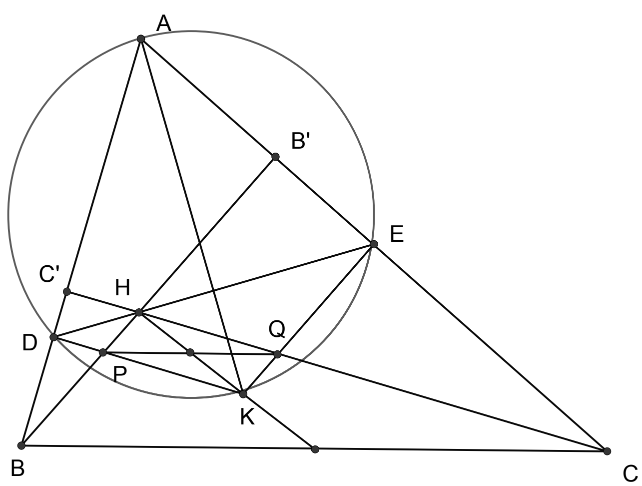
Trước hết ta sẽ chứng minh ΔADE cân tại A.

Thật vậy: Vì HD là phân giác góc ngoài của $\widehat{BHC}$ nên:

$\widehat{DHB} = \frac{1}{2}(\widehat{HBC} + \widehat{HCB}) = \frac{1}{2}\left[(90^0 - \widehat{ABC}) + (90 - \widehat{ACB})\right] = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Do đó: $\widehat{ADE} = \widehat{DBH} + \widehat{DHB} = 90^0 - \widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Tương tự, ta cũng có: $\widehat{AED} = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, suy ra: $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$, tức là tam giác ADE cân tại A.



Mặt khác AK là phân giác $\widehat{DAE}$ nên cũng là trung trực của đoạn DE, do đó AK chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE.

Từ đó, ta có: $KD \perp AB$, tương tự ta cũng có: $KE \perp AC$.

Gọi P là giao điểm của KD và HB, Q là giao điểm của KE và HC.

Ta có: $KP \perp AB,\ QH \perp AB \Rightarrow$ KP // QH.

Tương tự, ta cũng có: KQ // PH. Suy ra: KPHQ là hình bình hành, tức là HK đi qua trung điểm của PQ.

Gọi BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC. Theo định lí Thalès: DP // HC' $\Rightarrow \frac{PB}{PH} = \frac{DB}{DC'}$, QE // HB' $\Rightarrow \frac{QC}{QH} = \frac{EC}{EB'}$.

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DB}{DC'} = \frac{HB}{HC'}, \frac{EC}{EB'} = \frac{HC}{HB'}$.

Vì B, C, B', C' cùng thuộc đường tròn đường kính BC nên theo tính chất phương tích:

$HB.HB' = HC.HC' \Rightarrow \frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$. Từ các điều này, ta được: $\frac{PB}{PH} = \frac{QC}{QH} \Rightarrow$ PQ // BC.

Vì HK đi qua trung điểm của PQ nên cũng đi qua trung điểm của BC. Ta có đpcm.

<u>Bài 2</u>. Hãy tìm tất cả các cặp số tự nhiên (n ; k) với n là số nguyên không âm và k là số nguyên lớn hơn 1 sao cho số : $A = 17^{2006n} + 4.17^{2n} + 7.19^{5n}$ ***có thể phân tích được thành tích của k số nguyên dương liên tiếp.***

Trước hết ta thấy rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp phải chia hết cho 8 vì trong 4 số đó có 1 số chia hết cho 4 và một số chia 4 dư 2.

Từ $A = 17^{2006n} + 4.17^{2n} + 7.19^{5n}$, suy ra :

- Nếu n là số chẵn, ta có :

  $17^{2006n} \equiv 1 \pmod 8, 4.17^{2n} \equiv 4.1 \pmod 8, 7.19^{5n} \equiv 7.3^{2n} \equiv 7.3^{10} \equiv 7 \pmod 8$

  Suy ra : $A \equiv 12 \equiv 4 (\bmod 8)$, tức là A không chia hết cho 8.

- Nếu n là số lẻ, cũng tương tự :

  $17^{2006n} \equiv 1 \pmod 8, 4.17^{2n} \equiv 4.1 \pmod 8, 7.19^{2n} \equiv 7.3^{5} \equiv 7.3 \equiv 5 (\bmod 8)$

  Suy ra : $A \equiv 10 \equiv 2 (\bmod 8)$, tức là A cũng không chia hết cho 8.

Tức là trong mọi trường hợp luôn có A không chia hết cho 8.

Suy ra nếu k thỏa mãn đề bài thì $k < 4 \Rightarrow k \in \{2, 3\}$.

Xét từng trường hợp :

- Nếu $k = 2$: tồn tại x tự nhiên sao cho $A = x(x+1)$.

  \+ Nếu n = 0 thì A = 12, x = 3, thỏa mãn đề bài.

  \+ Nếu n > 0 thì rõ ràng $17^{1003n} > 4.17^{2n} + 7.19^{5n}$. Ta thấy :

  $A = x(x+1) = 17^{2006n} + 4.17^{2n} + 7.19^{5n} > 17^{2006n}$, suy ra $x > 17^{1003n}$ nhưng

  $x(x+1) > 17^{2006n} + 17^{1003n} > A$, mâu thuẫn.

Do đó, trong trường hợp này không có n thỏa mãn đề bài.

- Nếu $k = 3$: tồn tại x tự nhiên sao cho $A = x(x-1)(x+1), x \ge 1$; dễ thấy x phải là số chẵn (vì nếu ngược lại thì A chia hết cho 8, mâu thuẫn). Ta thấy :

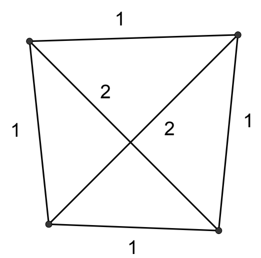
  $A \equiv 12.(-1)^n \equiv 2.(-1)^n (\bmod 5)$ trong khi $x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) \equiv 0, \pm 1 (\bmod 5)$, mâu thuẫn.

Do đó, trong trường hợp này không có n thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả các cặp số thỏa mãn đề bài là $(n;\ k) = (0;\ 2)$.

<u>Bài 3</u>. Trong không gian cho 2006 điểm mà trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Người ta nối tất cả các điểm đó lại bởi các đoạn thẳng. Số tự nhiên m gọi là số tốt nếu ta có thể gán cho mỗi đoạn thẳng trong các đoạn thẳng đã nối bởi một số tự nhiên không vượt quá m sao cho mỗi tam giác tạo bởi ba điểm bất kì trong số các điểm đó đều có hai cạnh được gán bởi hai số bằng nhau và cạnh còn lại gán bởi số lớn hơn hai số đó.
Tìm số tốt có giá trị nhỏ nhất.

Do trong các điểm đã cho không có bốn điểm nào đồng phẳng nên ba điểm bất kì trong chung luôn tạo thành một tam giác. Gọi S(n) là giá trị nhỏ nhất của *số tốt* ứng với n điểm trong không gian (n là số tự nhiên), ta sẽ xác định giá trị của S(2006). Ta chỉ xét các giá trị $n \geq 4$.



- Với n = 4 thì thử trực tiếp, ta thấy S(4) = 2. Bởi vì S(4) = 1 không thỏa mãn nên $S(4) \geq 2$, ta sẽ chỉ ra rằng S(4) = 2 thỏa mãn. Cụ thể ta có thể gán các đoạn thẳng như sau : gán 4 đoạn bất kì bởi số 1 và 2 đoạn còn lại bởi số 2, rõ ràng các tam giác tạo thành đều thỏa mãn đề bài.
- Với một giá trị n > 4 bất kì, ta sẽ chứng minh rằng :
$S(n) \geq 1 + S\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$.

Gọi a là số nhỏ nhất được gán cho các đoạn thẳng trong trường hợp có n điểm. Trong trường hợp tối thiểu, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng a = 1, ta gọi hai đầu mút của đoạn thẳng nào đó được gán số 1 là X và Y.

Trong n – 2 điểm còn lại, nếu có một điểm được nối với X và Y bởi một đoạn thẳng gán bởi số 1 thì điểm đó cùng với X và Y sẽ tạo thành một tam giác đều không thỏa mãn đề bài.
Do đó, nếu gọi A là tập hợp tất cả các điểm nối với X bởi một đoạn thẳng gán số 1 (có tính luôn điểm Y) và B là tập hợp tất cả các điểm nối với Y bởi một đoạn thẳng gán số 1 (có tính luôn điểm X) thì giữa A và B không có phần tử nào chung hay $|A| + |B| = n$.

*Ta có các nhận xét sau :

- Nếu lấy một điểm bất kì trong tập A và một điểm bất kì trong B thì hai điểm đó cũng phải được nối bởi đoạn thẳng gán số 1 vì nếu không thì hai điểm đó sẽ cùng với X sẽ tạo thành một tam giác không thỏa mãn đề bài (tam giác đó hoặc không có hai số được gán trên hai cạnh bằng nhau hoặc có hai cạnh bằng nhau nhưng cạnh còn lại gán số 1 nhỏ hơn).
- Hai điểm bất kì trong A được nối với nhau bởi một đoạn thẳng gán số lớn hơn 1 bởi nếu không thì khi chọn thêm một điểm trong B, ta sẽ có một tam giác không thỏa mãn đề bài (tam giác đó đều). Tương tự với tập hợp B. Tức là trong các tập A và B đều có chứa các số lớn hơn 1.

Tiếp theo, ta lại thấy trong mỗi tập A, B như vậy đều cần thêm $S(|A|), S(|B|)$ số nữa để gán cho các đoạn thẳng. Giả sử $|A| \geq |B|$ thì $|A| \geq \left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1 = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

Ta hoàn toàn có thể gán các số ở tập A trùng với các số ở tập B nên các số cần có thêm nữa là $S\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$, tính thêm số 1 nhỏ nhất đã được gán cho đoạn XY ban đầu, ta được:

$S(n) \ge 1 + S\left(\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$.

Từ đó, áp dụng liên tiếp kết quả này, ta có: (chú ý rằng S(4) = 2).

$S(2006) \ge 1 + S(1003) \ge 2 + S(502) \ge ... \ge 9 + A(4) = 11$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng giá trị 11 này thỏa mãn đề bài.

* Thật vậy :

Ta xây dựng cách gán các điểm từ thấp đến cao bằng cách ghép các bộ điểm ít hơn lại. Cụ thể như sau :

- Đầu tiên ta xây dựng cho bộ 4 điểm. Cách gán tương tự như ở trên, nhưng trong trường hợp này gán 4 đoạn bởi số 11 và 2 đoạn bởi số 10.
- Ghép 2 bộ này lại và tách ra từ một trong hai bộ đó ra 2 điểm, gán cho đoạn thẳng nối 2 điểm đó bởi số 10, ta đã có tất cả 8 điểm.
- Tiếp tục ghép tương tự như vậy theo thứ tự như sau :

  $4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 63 \to 126 \to 251 \to 502 \to 1003 \to 2006$

  (Các trường hợp từ 32 đến 63 hoặc tương tự ta phải bỏ đi 1 điểm nào đó ở một trong hai bộ ra ngoài). Mỗi lần ghép hai bộ điểm lại thì số gán trên đoạn được tách ra lại giảm đi 1 đơn vị, đến khi ghép được 2006 điểm thì số đó chính là 1.

Dễ thấy cách gán số cho các đoạn thẳng này thỏa mãn đề bài.

Vậy giá trị nhỏ nhất của *số tốt* cần tìm là 11.

<u>Bài 4.</u> Chứng minh rằng với mọi số thực $x,y,z\in[1;2]$, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge 6(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}).$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Trước hết ta thấy rằng :

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-9=\sum\frac{(x-y)^2}{xy},\ 6(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y})-9=\sum\frac{(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.$$

Ta cần chứng minh :

$$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\ge 6(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y})\Leftrightarrow\sum\frac{(x-y)^2}{xy}\ge\sum\frac{3(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}$$

với mọi số thực x, y, z thuộc đoạn [1 ; 2].

Đặt $S_x=\frac{1}{yz}-\frac{3}{(x+y)(x+z)}$, $S_y=\frac{1}{zx}-\frac{3}{(y+x)(y+z)}$, $S_z=\frac{1}{xy}-\frac{3}{(z+x)(z+y)}$.

Bất đẳng thức đã cho viết dưới dạng tương đương là:

$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $2\ge x\ge y\ge z\ge 1$.

Ta sẽ chứng minh rằng $S_x,\ S_y\ge 0$. Thật vậy:

$S_x\ge 0\Leftrightarrow x^2+xy+xz-2yz\ge 0$, đúng.

$S_y\ge 0\Leftrightarrow y^2+yx+yz-2zx\ge x(y-z)+z(z+y-x)\ge 0$ (do $x,y,z\in[1;2]$ nên $y+z-x\ge 0$).

- Nếu $S_z\ge 0$, ta có đpcm.

- Nếu $S_z<0$, ta chứng minh được rằng $S_x+2S_z\ge 0, S_y+2S_z\ge 0$.

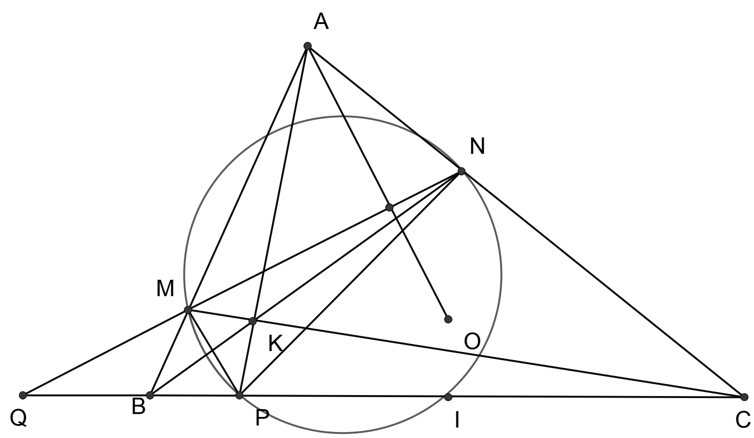
Khi đó dễ dàng thấy rằng vì: $(x-y)^2\le 2\left[(y-z)^2+(z-x)^2\right]$ và $S_z<0$ nên

$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge(S_x+2S_z)(y-z)^2+(S_y+2S_z)(z-x)^2\ge 0$

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi x = y = z hoặc y = z = 1, x = 2 và các hoán vị của chúng.

<u>Bài 5</u>. Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d luôn vuông góc với OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các tia AB, AC. Giả sử các đường thẳng BN và CN cắt nhau tại K; giả sử đường thẳng AK cắt đường thẳng BC.
1. Gọi P là giao của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.
2. Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt BC = a và l là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng HK. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC.
Từ đó suy ra: $l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$ ***. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?***



1. Không mất tính tổng quát, giả sử AB < AC (trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự).

Do tam giác ABC không cân nên AO không vuông góc với BC và MN không song song với BC, do đó MN phải cắt đường thẳng BC tại một điểm, giả sử là Q; gọi I là trung điểm BC.

Theo định lí Menelaus cho ba điểm Q, M, N thẳng hàng: $\frac{NA}{NC}.\frac{MB}{MA}.\frac{QB}{QC} = 1$.

Mặt khác, theo định lí Céva cho các đoạn AP, BN, CM đồng quy, ta có: $\frac{NA}{NC}.\frac{MB}{MA}.\frac{PB}{PC} = 1$.

Từ đó, suy ra: $\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$ hay Q, B, P, C là một hàng điểm điều hòa, suy ra: $IP.IQ = IB^2 = IC^2$

Do I là trung điểm BC nên $OI \perp BC \Rightarrow QI^2 - BI^2 = OQ^2 - OB^2$, do đó:

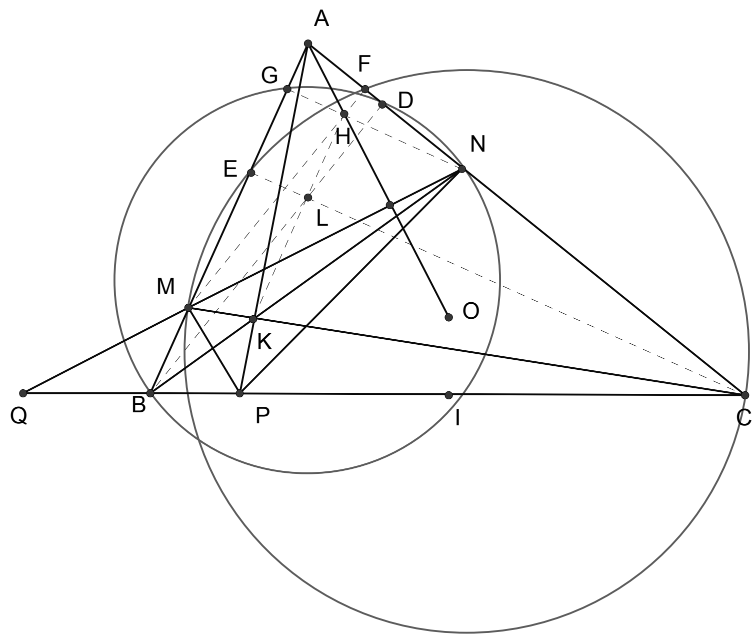
$QI.QP = QI^2 - QI.PI = QI^2 - IB^2 = OQ^2 - OB^2 = QB.QC$

(do theo tính chất phương tích của Q đối với (O) thì $OQ^2 - OB^2 = OQ^2 - R^2 = QB.QC$).

Mà tứ giác BMNC cũng nội tiếp vì có $\widehat{NCB} = \widehat{xAB} = \widehat{AMN}$ (với Ax là tia tiếp tuyến của (O)).
Suy ra $QM.QN = QB.QC$.

Từ đó suy ra $QM.QN = QP.QI$, suy ra tứ giác MNIP nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua điểm I cố định. Ta có đpcm.

2. Gọi BD, CE là hai đường cao của tam giác ABC, L là trực tâm của tam giác ABC; gọi MF, NG là hai đường cao của tam giác AMN, H là trực tâm của tam giác AMN. Ta cần chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.



Xét đường tròn (O_1) đường kính BN và (O_2) đường kính CM.

Ta thấy: KM.KC = KB. KN nên K có cùng phương tích đến (O_1), (O_2), tức là K thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này.

Đồng thời, dễ thấy rằng các điểm D, G thuộc (O_1) và M, F thuộc (O_2).

Do H, L là trực tâm của tam giác ABC và AMN nên LB. LD = LC. LE, HN. HG = HE. HM; tức là H, L cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1), (O_2).

Từ đó suy ra H, K, L cùng thuộc trục đẳng phương của (O_1), (O_2) nên chúng thẳng hàng.

Từ đó suy ra $l \le AL$.

Mặt khác do tam giác ABC nhọn nên $AL = 2OI = \sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

Do đó $AL = l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$. Đây chính là đpcm.

Đến đây, ta sẽ tìm vị trí của d sao cho đẳng thức xảy ra.

Giả sử d cắt AB, AC tại M và N thỏa mãn $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = k \Rightarrow MN = k.BC$.

Gọi R, S lần lượt là trung điểm của BN và CM; suy ra R, S cũng chính là tâm của hai đường tròn (O_1), (O_2).

Ta thấy khi đẳng thức xảy ra thì AL vuông góc với trục đẳng phương của (O_1), (O_2), tức là AL song song với đường nối tâm RS của hai đường tròn này, mà AL vuông góc với BC nên RS phải vuông góc với BC.

Ta có: $2\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NM}$, mà $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NM}).\overrightarrow{BC} = 0$. Do góc tạo bởi MN và BC chính là $\widehat{MQB} = \widehat{ANM} - \widehat{ACB} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ nên từ đẳng thức trên suy ra:

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MN} = BC.kBC.\cos(B-C) \Rightarrow k = \frac{1}{\cos(B-C)}.$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k = \dfrac{1}{\cos(B-C)}$, tức là đường thẳng d cắt AB tại M, AC tại N sao cho $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{1}{\cos(B-C)}$.

<u>Bài 6</u>. Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi:

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{3a_n}) \text{ với mọi n = 1, 2, 3, …}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, số $A_n = \frac{3}{3a_n^2 - 1}$ là một số chính phương và nó có ít nhất n ước nguyên tố phân biệt.

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $3A_{n+1} = 4A_n(A_n + 3)$ với mọi n nguyên dương. (*)

Thật vậy:

Ta có: $A_n + 3 = \frac{3}{3a_n^2 - 1} + 3 = \frac{9a_n^2}{3a_n^2 - 1}$ nên $4A_n(A_n + 3) = 36A_n.\frac{9a_n^2}{3a_n^2 - 1} = \frac{108a_n^2}{\left(3a_n^2 - 1\right)^2}$.

Mặt khác:

$$3A_{n+1} = \frac{9}{3a_{n+1}^2 - 1} = \frac{9}{3.\frac{1}{2^2}(a_n + \frac{1}{3a_n})^2 - 1} = \frac{108a_n^2}{\left(3a_n^2 - 1\right)^2}.$$

Do đó: (*) được chứng minh, tức là $3A_{n+1} = 4A_n(A_n + 3)$ với mọi n nguyên dương.

Hơn nữa, ta tính được: $A_n = 9$ nên dễ dàng thấy rằng A_n chia hết cho 3 với mọi n.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng: $\frac{A_n}{3} + 1$ là số chính phương với mọi n (**).

- Với n =1, $\frac{A_1}{3} + 1 = 4$ là một số chính phương nên (**) đúng.
- Giả sử với n = k, (**) cũng đúng, tức là tồn tại số tự nhiên p sao cho $\frac{A_k}{3} + 1 = p^2$.

  Ta có: $\frac{A_{k+1}}{3} + 1 = \frac{4A_k(A_k + 3)}{9} + 1 = 4.\frac{A_k}{3}.(1 + \frac{A_k}{3}) + 1 = 4p^2(p^2 - 1) + 1 = (2p^2 - 1)^2$ cũng là một số chính phương. Suy ra (**) cũng đúng với $n = k + 1$.

Do đó, (**) được chứng minh.

Từ $3A_{n+1} = 4A_n(A_n + 3) \Rightarrow A_{n+1} = 4A_n.(\frac{A_n}{3} + 1)$ và (**), ta cũng dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp rằng A_n là số chính phương với mọi n.

Cuối cùng, ta sẽ chứng minh rằng A_n có ít nhất n ước nguyên tố đôi một khác nhau cũng bằng phương pháp quy nạp. (***)

- Với n = 1, rõ ràng (***) đúng.
- Giả sử (***) đúng với n = k, tức là A_k có ít nhất k ước nguyên tố khác nhau.

  Ta xét hai trường hợp:

+ Nếu k có ít nhất k + 1 ước nguyên tố khác nhau thì rõ ràng (***) đúng.

+ Nếu k có đúng k ước nguyên tố đôi một khác nhau, giả sử đó là $p_1, p_2, p_3, .., p_k$.

Khi đó: (A_k, p_i), $i = \overline{1,k}$ là 1 hoặc 3.

Giả sử A_{k+1} chỉ có đúng k ước nguyên tố đôi một khác nhau là các giá trị ở trên thì cần phải có $A_k + 3 = 3^m, m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$.

Nhưng khi đó thì $A_k \equiv -3 \pmod 9$ không phải là số chính phương, mâu thuẫn.

Từ đó dẫn đến A_{k+1} phải có một ước nguyên tố nào khác k ước đã có, tức là có ít nhất k + 1 ước nguyên tố đôi một khác nhau hay (***) đúng với $n = k + 1$.

Do đó (***) được chứng minh.

Vậy với mọi n nguyên dương, số $A_n = \dfrac{3}{3a_n^2 - 1}$ là một số chính phương và nó có ít nhất n ước nguyên tố phân biệt, bài toán được giải quyết hoàn toàn.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2007

Bài 1.

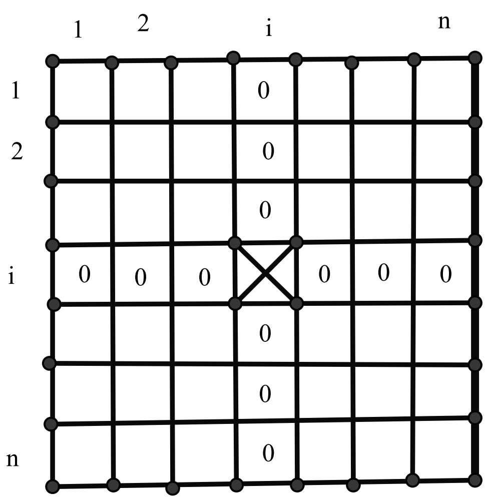
Cho hai tập hợp A,B là tập hợp các số nguyên dương thỏa mãn $|A| = |B| = n$ (với n là số nguyên dương) và có tổng các phần tử bằng nhau. Xét bảng ô vuông $n \times n$.

Chứng minh rằng ta có thể điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i/ Tập hợp tổng các số ở mỗi hàng là tập A.

ii/ Tập hợp tổng các số ở mỗi cột là tập B.

iii/ Có ít nhất $(n-1)^2 + k$ số 0 trong bảng với k là số các phần tử chung của A và B.



Trước hết, ta thấy rằng nếu một giá trị k sao cho tồn tại 2 phần tử bằng nhau ở mỗi tập là $a_k = b_k = t$ thì ta điền số t vào ô vuông nằm ở hàng thứ k và cột thứ k, các ô còn lại của hàng thứ k và cột thứ k đều điền vào số 0; như thế thì tổng các số ở hàng và cột này thỏa mãn đề bài và không ảnh hưởng đến các hàng và cột khác. Do đó, không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp $A \cap B = \varnothing$ (trường hợp có các phần tử chung thì điền thêm vào các hàng và cột theo cách tương tự như trên), tức là số phần tử chung của hai tập là $k = 0$.

Ta sẽ chứng minh bài toán này bằng quy nạp. Gọi T là tập hợp các điều kiện i/, ii/, iii/ như trên (điều kiện iii/ tương ứng với trường hợp xét số nguyên dương n).

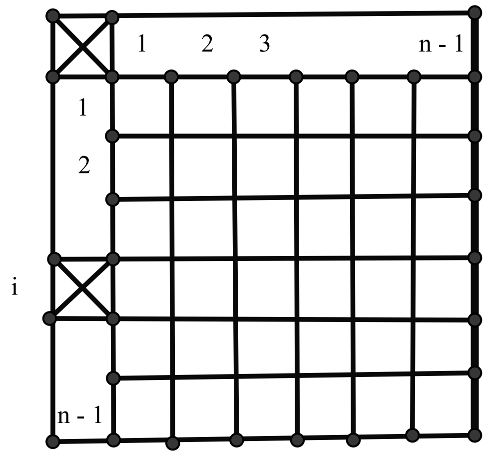
Với n = 1, bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với mọi số tập hợp có n – 1 phần tử. Ta sẽ chứng minh rằng với hai tập A, B có n phần tử, ta cũng có thể xây dựng một bảng $n \times n$ thỏa mãn điều kiện T .

Thật vậy, xét hai tập hợp $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$ trong đó: $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$, $b_1 < b_2 < b_3 < ... < b_n$ (hai tập này không có phần tử nào chung).

Giả sử $a_1 < b_1$. Do tổng các phần tử ở hai tập bằng nhau nên tồn tại một chỉ số i thỏa mãn $a_i > b_1 > b_1 - a_1 \Rightarrow a_i - (b_1 - a_1) > 0$. Ta xét hai tập hợp A*, B* như sau:

$A^* = \{a_2, a_3, ..., a_{i-1}, a_i - b_1 + a_1, ..., a_n\}$, $B^* = \{b_2, b_3, ..., b_n\}$.



Hai tập hợp này có cùng số phần tử là n – 1 nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại một bảng có kích thước $(n-1)\times(n-1)$ thỏa mãn điều kiện T (trong bảng này có ít nhất $(n-2)^2$ số 0).

Ta thêm vào bên trái bảng một cột và bên trên bảng một hàng nữa như hình vẽ. Ở ô góc bên trái và phía trên, ta điền số a_1, ở hàng thứ i của bảng ban đầu (hàng có tổng các phần tử bằng $a_i - b_1 + a_1$), ta điền số $b_1 - a_1$; còn tất cả các ô còn lại của hàng và cột vừa thêm vào, ta điền vào các số 0. Khi đó, bảng này có tổng các phần tử ở mỗi hàng là tập A và tổng các phần tử ở mỗi cột là tập B, số các số 0 ở bảng vừa lập được không nhỏ hơn $(n-2)^2 + 2(n-1) - 1 = (n-1)^2$ và do đó nó thỏa mãn điều kiện T.

Do đó, bài toán cũng đúng với mọi tập hợp có n phần tử.

Theo nguyên lí quy tạp, bài toán này đúng với mọi số nguyên dương n.

Vậy ta có đpcm.

Bài 2.

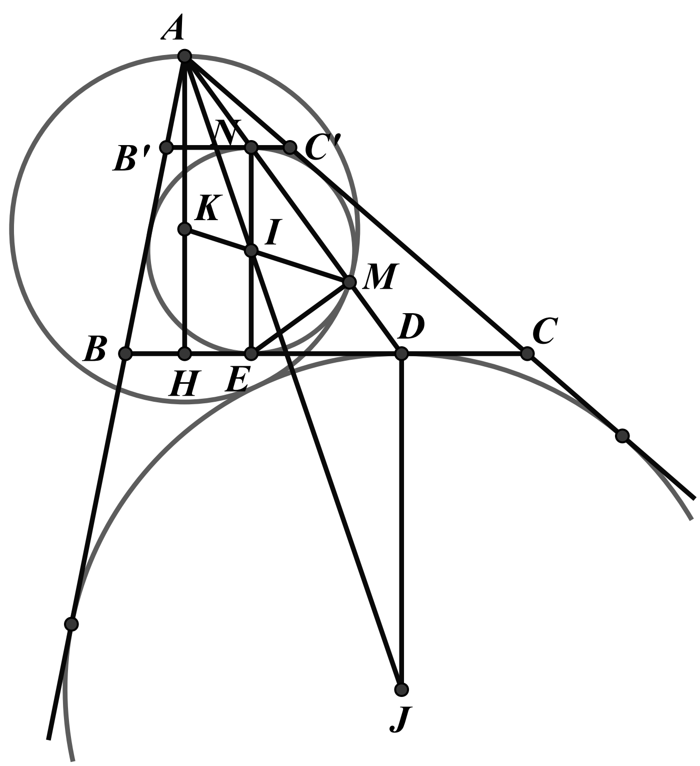
Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn nội tiếp I. Gọi (k_a) là đường tròn có tâm nằm trên đường cao của góc A và tiếp xúc trong với đường tròn (I) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự .

1/ Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại P.

2/ Gọi $(J_a),(J_b),(J_c)$ lần lượt là các đường tròn đối xứng với đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC qua trung điểm BC, CA, AB.
Chứng minh P là tâm đẳng phương của 3 đường tròn nói trên.

1/ Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) có D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A lên BC. Gọi M, N là giao điểm của AD với (I) (N nằm giữa A và M). Giả sử IM cắt đường cao AH tại K. Chứng minh rằng: KA = KM.



* Thật vậy:

Gọi E là tiếp điểm của (I) lên BC. Giả sử IE cắt (I) tại điểm thứ hai là N' khác E. Qua N' vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại B' và C'. Dễ thấy tồn tại một phép vị tự biến tam giác AB'C' thành tam giác ABC. Phép vị tự đó cũng biến tiếp điểm N' của đường tròn bàng tiếp (I) của Δ AB'C' lên B'C' thành tiếp điểm D của đường tròn bàng tiếp (J) của Δ ABC lên BC. Suy ra A, N', D thẳng hàng hay N' trùng với N. Khi đó, tam giác IMN đồng dạng với Δ KMA (do IN // AK), mà Δ IMN cân tại I nên Δ KAM cân tại K hay KA = KM.

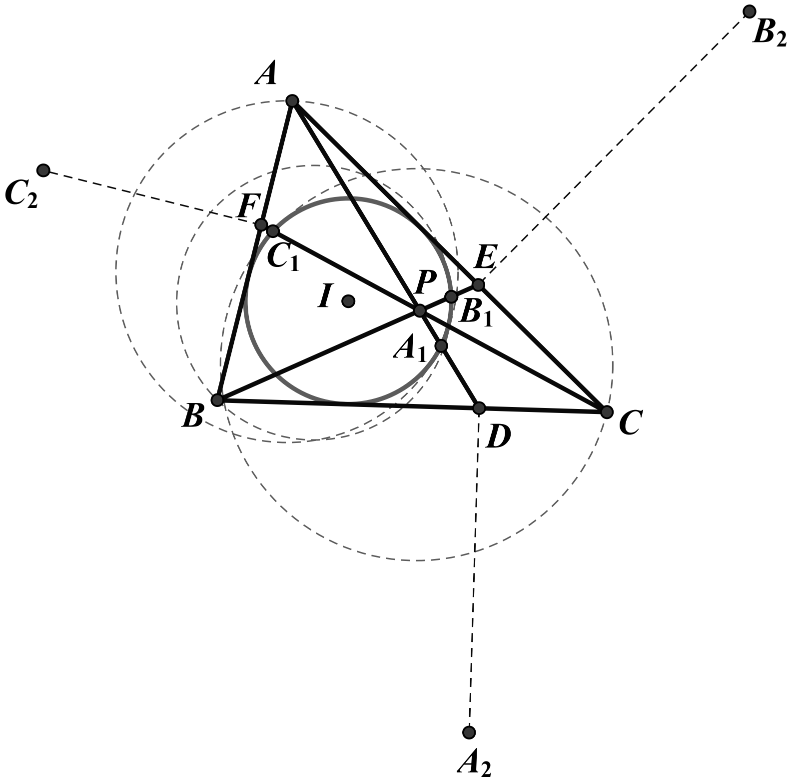
Ta có đpcm.

Từ đây suy ra: đường tròn có tâm thuộc đường cao góc A, đi qua A và tiếp xúc với (I) tại M thì M thuộc AD. Dễ thấy đường tròn đó là duy nhất.

***Trở lại bài toán:**

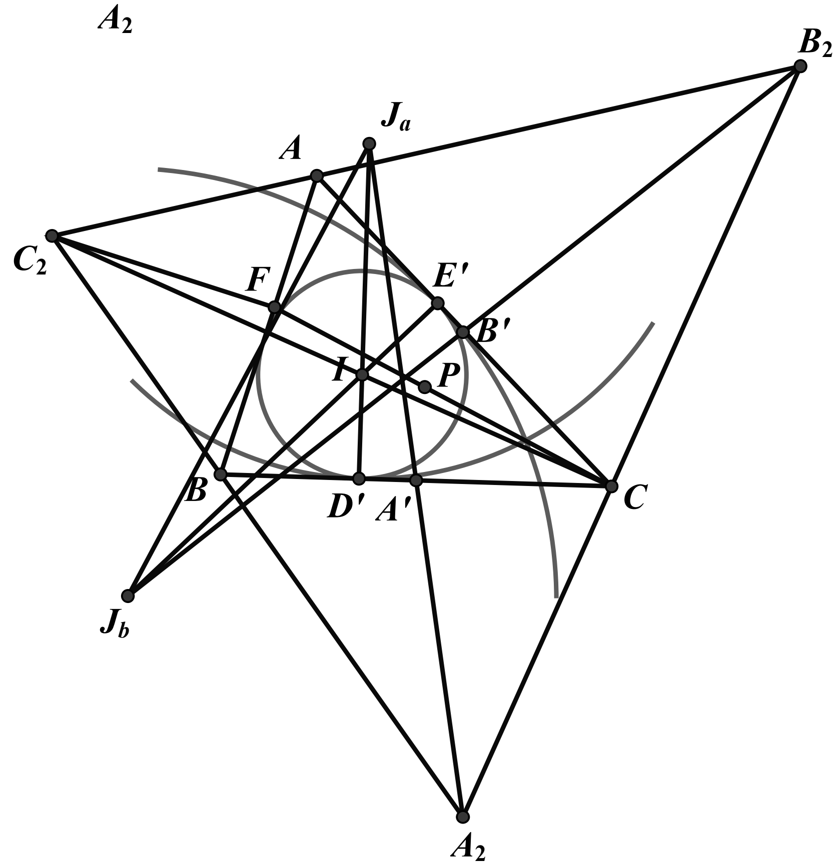
Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC lên các cạnh BC, CA, AB. Theo bổ đề trên, ta thấy: $A_1 \in AD, B_1 \in CF, C_1 \in BE$.

Suy ra: AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi AD, BE, CF đồng quy. (1)



Mặt khác: nếu ta đặt
$BC = a, CA = b, AB = c,$
$\dfrac{AB + BC + CA}{2} = p$
thì có thể dễ dàng tính được:
$DB = EC = p - c$
$DC = AF = p - b$
$AE = BF = p - a$.
Suy ra: $\dfrac{DB}{DC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1$,
theo định lí Ceva đảo, ta có AD, BE, CF đồng quy. (2)
Từ (1) và (2), ta có
$AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ đồng quy.
Ta có đpcm.

2/ Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của BC, CA; A_2, B_2, C_2 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của ΔABC. Gọi D', E' lần lượt là tiếp điểm của (I) lên BC, CA. Dễ thấy D đối xứng với D' qua trung điểm A' của BC, A_2 đối xứng với J_a qua A' nên J_aD' // A_2D, mà $A_2D \perp BC \Rightarrow J_aD' \perp BC$.
Do đó: (J_a) tiếp xúc với BC tại D'.
Hoàn toàn tương tự:
(J_b) tiếp xúc với CA tại E'.



Ta có:
$CD' = CE'$ nên phương tích từ C đến (J_a) và (J_b) bằng nhau, tức là C thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này.

Ta sẽ chứng minh rằng CP, cũng chính là CF, vuông góc với đoạn nối tâm J_aJ_b của hai đường tròn (J_a), (J_b).

Theo cách xác định các điểm J_a, J_b, ta thấy A' là trung điểm của A_2J_a, B' là trung điểm của B_2J_b.

Do đó: $2\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{J_aJ_b}$ hay $\overrightarrow{J_aJ_b} = 2\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A_2B_2}$. Ta cũng có:

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2F}$.

Ta có: $\overrightarrow{J_aJ_b}.\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{A_2B_2})(\overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{C_2F}) = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{C_2F} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F} =$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} - \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F}$ (do C_2F vuông góc với AB, A_2B_2 vuông góc với CC_2). (1)

Mặt khác, ta thấy A, B, C chính là chân các đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ nên rõ ràng: $\Delta C_2AB \sim \Delta C_2B_2A_2$, mà C_2F là đường cao của ΔC_2AB, C_2C là đường cao của $\Delta C_2B_2A_2$ nên:

$\dfrac{C_2F}{AB} = \dfrac{C_2C}{A_2B_2} \Rightarrow C_2F.A_2B_2 = AB.CC_2$. Cũng từ hai tam giác ΔC_2AB, $\Delta C_2B_2A_2$ đồng dạng; ta có:

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CC_2}) = (\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{C_2F})$. Do đó: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{A_2B_2}.\overrightarrow{C_2F}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\overrightarrow{J_aJ_b}.\overrightarrow{C_2F} = 0$ hay $C_2F \perp J_aJ_b$.

Do đó C_2F chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (J_a), (J_b), tức là P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (J_a), (J_b).

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có P thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (J_c), (J_b).

Từ đó suy ra P chính là tâm đẳng phương của (J_a), (J_b), (J_c).

Đây chính là đpcm.

Bài 3.

Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$S=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

* Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề:

"Với mọi a, b, c không âm và không đồng thời bằng 0, ta có:

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c hoặc a = b, c = 0 và các hoán vị."

* Chứng minh:

Quy đồng và khai triển BĐT trên, ta cần chứng minh rằng:

$$\sum_{sym}(4a^5b-a^4b^2-3a^3b^3)+\sum_{sym}(a^4bc-2a^3b^2c+a^2b^2c^2)\ge 0 \qquad (*)$$

Theo BĐT Schur cho các số không âm a, b, c, ta có:

$\sum_{sym}a(a-b)(a-c)\ge 0$, nhân vào hai vế cho số abc không âm và khai triển, ta có:

$$\sum_{sym}(a^4bc-2a^3b^2c+a^2b^2c^2)\ge 0. \qquad (1)$$

Hơn nữa, theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\sum_{sym}(4a^5b-a^4b^2-3a^3b^3)=\sum_{sym}(a^5b-a^4b^2)+\sum_{sym}3(a^5b-a^3b^3)\ge 0. \qquad (2)$$

Cộng từng vế các BĐT (1) và (2) lại, ta có BĐT (*).

Đẳng thức xảy ra trong (*) khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra trong (1) và (2), tức là khi a = b = c hoặc a = b, c = 0 và các hoán vị. Bổ đề được chứng minh.

*** Trở lại bài toán:**

Ta có: $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan^2\frac{A}{2}+1}$. Tương tự với $\cos^2\frac{B}{2},\cos^2\frac{C}{2}$.

Thay các biến đổi này vào biểu thức đã cho, ta được:

$S = \sum \frac{x^2+1}{(y^2+1)(z^2+1)}$, trong đó $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2}; x, y, z > 0$.

(Ở đây kí hiệu $\sum x$ là tổng đối xứng lấy theo các biến x, y, z).

Mặt khác, trong tam giác ABC, ta luôn có:

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = 1$.

Do đó:

$$S = \sum \frac{x^2+1}{(y^2+1)(z^2+1)} = \sum \frac{(x^2+\sum xy)}{(y^2+\sum xy)(z^2+\sum xy)} = \sum \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)(y+x)(z+x)(z+y)} =$$
$$= \sum \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Áp dụng bổ đề ở trên, ta được: $S \geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)} = \frac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{9}{4}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = z$ hay ABC là tam giác đều.

<u>Bài 4.</u> Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)=f(x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}) \text{ ***với mọi*** } x\in\mathbb{R}.$$

Ta có: $x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{9}=(x+\frac{1}{6})^2+\frac{1}{12}\Rightarrow f(x)=f((x+\frac{1}{6})^2+\frac{1}{12}),\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $y=x+\frac{1}{6}\Leftrightarrow x=y-\frac{1}{6}$. Thay vào giả thiết đã cho, ta có: $f(y-\frac{1}{6})=f(y^2+\frac{1}{12})$. (*)

Xét hàm số: $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $g(x+\frac{1}{6})=f(x)\Leftrightarrow f(x-\frac{1}{6})=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Từ (*), ta được: $g(x)=g(x^2+\frac{1}{4}),\forall x\in\mathbb{R}$, rõ ràng $g(x)$ cũng liên tục.

Ta sẽ xác định hàm số $g(x)$ thỏa mãn điều kiện trên.

Ta thấy: $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=g(x^2+\frac{1}{4})=g((-x)^2+\frac{1}{4})=g(-x)$ nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Ta chỉ cần xét $x\ge 0$. Ta có hai trường hợp:

- Với $x_0\le\frac{1}{2}$: Xét dãy số: $u_1=x_0, u_{n+1}=u_n^2+\frac{1}{4}, n\ge 1$. Khi đó: $u_{n+1}-u_n=(u_n-\frac{1}{2})^2\ge 0$ nên dãy (u_n) tăng. Mặt khác, bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n\le\frac{1}{2},\forall n$, tức là dãy này bị chặn trên. Từ đó suy ra nó có giới hạn. Gọi t là giới hạn đó thì $t=t^2+\frac{1}{4}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Do đó: $g(x)=g(\frac{1}{2}),\forall x_0\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

- Với $x_0>\frac{1}{2}$: Tương tự như trên, xét dãy số $v_1=x_0, v_{n+1}=\sqrt{v_n-\frac{1}{4}}\ge 0, n\ge 1$.

Khi đó: $v_{n+1}-v_n=\sqrt{v_n-\frac{1}{4}}-v_n=\dfrac{-(v_n-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{v_n-\frac{1}{4}}+v_n}<0$ nên dãy đã cho là dãy giảm. Cũng bằng quy nạp, ta chứng minh được $v_n>\frac{1}{2}$, tức là dãy đã cho bị chặn dưới, suy ra nó có giới hạn.

Gọi k là giới hạn đó thì $k=\sqrt{k-\frac{1}{4}}\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$.

Do đó: $g(x)=g(\frac{1}{2}),\forall x_0\in(\frac{1}{2};+\infty)$. Đặt $g(\frac{1}{2})=a\in\mathbb{R}$.

Từ đó suy ra: $g(x)=a,\ \forall x\ge 0$ hay $g(x)=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có: $f(x)=a,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Đây là tất cả hàm số cần tìm.

Bài 5.

Cho A là tập con chứa 2007 phần tử của tập: $\{1,2,3,...,4013,4014\}$ ***thỏa mãn với mọi*** $a,b \in A$ ***thì a không chia hết cho b. Gọi*** m_A ***là phần tử nhỏ nhất của A.***

Tìm giá trị nhỏ nhất của m_A ***với A thỏa mãn các điều kiện trên.***

Chia tập hợp $\{1,2,3,...,4013,4014\}$ thành 2007 phần $P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{2007}$ (mỗi tập hợp chứa ít nhất một phần tử của $\{1,2,3,...,4013,4014\}$) thỏa mãn tập hợp P_a chứa tất cả các số nguyên dương có dạng $2^n(2a-1)$, trong đó n là một số không âm. Khi đó, tập hợp con A của $\{1,2,3,...,4013,4014\}$ không thể chứa hai phần tử cùng thuộc một trong 2007 tập hợp đó vì nếu không thì rõ ràng có một số sẽ chia hết cho số còn lại, mâu thuẫn. Mặt khác, A lại có đúng 2007 phần tử nên A chứa đúng 1 phần tử của mỗi tập P_a nói trên.

Gọi α_i là một phần tử của A với $\alpha_i \in P_i, i = \overline{1,2007}$. Xét các phần tử $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, ...\alpha_{1094}$ lần lượt có các dạng $2^n, 3.2^n, 3^2.2^n, ..., , 3^7.2^n$; rõ ràng mỗi phần tử đó chỉ có hai ước nguyên tố là 2 và 3. Ta cũng thấy rằng lũy thừa lớn nhất của 2 trong α_1 phải lớn hơn lũy thừa lớn nhất của 2 trong α_2 vì nếu ngược lại thì $\alpha_2 \vdots \alpha_1$, mâu thuẫn.

Hoàn toàn tương tự với các phần tử khác trong dãy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, ...\alpha_{1094}$, tức là nếu $i < j$ thì lũy thừa của 2 trong α_i phải lớn hơn lũy thừa của 2 trong α_j. Do đó, lũy thừa của 2 trong dãy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, ...\alpha_{1094}$ là một dãy giảm thực sự. Do có 8 phần tử trong dãy trên (tương ứng với lũy thừa của 3 thay đổi từ 0 đến 7) nên giá trị của α_1 ít nhất là $2^7 = 128$. Hơn nữa, các phần tử của dãy có giá trị của lũy thừa 3 tăng dần (nếu ngược lại, giá trị của lũy thừa 3 giảm mà lũy thừa 2 cũng giảm nên có một số chia hết cho số khác, mâu thuẫn).

Suy ra: α_1 chính là giá trị nhỏ nhất trong dãy trên.

Hoàn toàn tương tự với các số nguyên tố khác, ta cũng xét số có dạng $\alpha_i = 2^{n_i}.3^{n_i}...p_k^{n_k}$, trong đó 2, 3, …, p_k là các ước nguyên tố không vượt quá 4014. Từ đó suy ra α_1 cũng chính là phần tử nhỏ nhất trong các phần tử của tập A. Do đó phần tử nhỏ nhất m_A của tập A chính là α_1, như chứng minh ở trên $\alpha_1 \geq 128$ hay $m_A \geq 128$.

Ta sẽ chứng minh rằng 128 chính là giá trị nhỏ nhất của m_A bằng cách chỉ ra một tập hợp con A của $\{1,2,3,...,4013,4014\}$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Xét tập hợp: $A = \left\{\alpha_i = 2^{f(i)}(2i-1) \mid 1338 \leq 3^{f(i)}.(2i-1) \leq 4014\right\}$.

Rõ ràng tập hợp này có đúng 2007 phần tử thuộc $\{1,2,3,...,4013,4014\}$.

Ta sẽ chứng minh rằng α_x không chia hết cho α_y, với $x > y$ (tức là tập hợp này thỏa mãn đề bài).

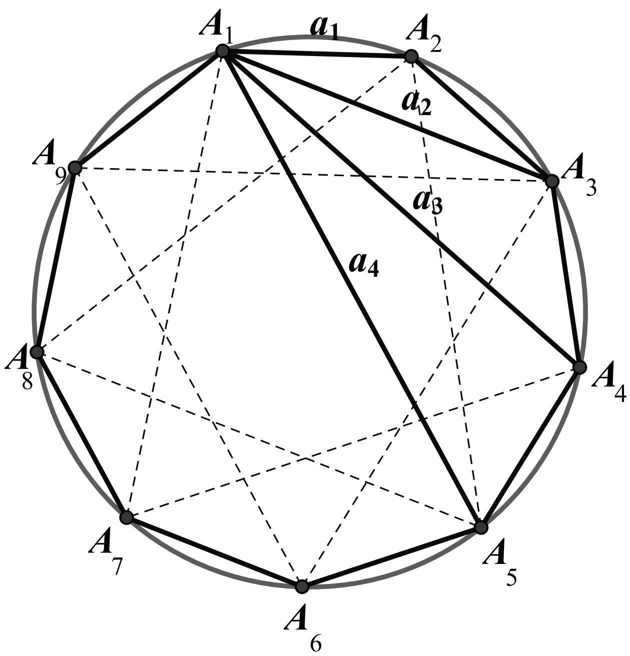
Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại x, y thỏa mãn $\alpha_x \vdots \alpha_y$, khi đó: $2^{f(x)}(2x-1) \vdots 2^{f(y)}(2y-1)$, tức là $f(x) \ge f(y)$ và $(2x-1) \vdots (2y-1)$.

Từ cách xác định các giá trị u, v; ta có: $(2x-1) \vdots (2y-1) \Rightarrow 2x-1 \ge 3(2y-1)$, đồng thời $3^{f(y)+1}(2y-1) \ge 4014 > 3^{f(x)}(2x-1) \ge 3^{f(x)+1}(2y-1) \Rightarrow f(y) > f(x)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ tất cả các phần tử của A đều thỏa mãn với mọi $a, b \in A$ thì a không chia hết cho b.

Vậy 128 chính là giá trị nhỏ nhất của m_A cần tìm.

<u>Bài 6</u>.

Cho đa giác 9 cạnh đều (H). Xét ba tam giác với các đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) đã cho sao cho không có hai tam giác nào có chung đỉnh.
Chứng minh rằng có thể chọn được từ mỗi tam giác 1 cạnh sao cho 3 cạnh này bằng nhau.



Kí hiệu hình (H) đã cho là đa giác $A_1A_2A_3...A_8A_9$ như hình vẽ. Trước hết, ta thấy rằng độ dài các cạnh và các đường chéo của hình (H) chỉ thuộc 4 giá trị khác nhau (nếu gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của (H) thì ta dễ dàng tính được các giá trị đó là $2R.\sin\frac{\pi}{9}, 2R\sin\frac{2\pi}{9}, 2R\sin\frac{3\pi}{9}, 2R\sin\frac{4\pi}{9}$) ta đặt chúng là a_1, a_2, a_3, a_4 theo thứ tự tăng dần của độ dài. Rõ ràng các tam giác có đỉnh thuộc các đỉnh của (H) sẽ có cạnh có độ dài thuộc 1 trong 6 dạng sau:

$$(a_1,a_1,a_2),(a_2,a_2,a_4),(a_1,a_3,a_4),$$
$$(a_3,a_3,a_3),(a_2,a_3,a_4),(a_4,a_4,a_1).$$

Giả sử 3 tam giác được lấy ra là $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Xét các trường hợp sau:

- Nếu trong các tam giác đó có một tam giác đều, rõ ràng, tam giác này phải có độ dài các cạnh là $2R.\sin\frac{3\pi}{9}$; không mất tính tổng quát, giả sử đó là tam giác $A_1A_4A_7$. Do các tam giác $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ không có hai đỉnh nào trùng nhau nên ta sẽ lập một tam giác có các đỉnh là một trong hai đỉnh của các tập hợp $\{A_2, A_3\}, \{A_4, A_5\}, \{A_7, A_8\}$. Ta sẽ chứng minh rằng tam giác đó phải có ít nhất 1 cạnh có độ dài là $2R.\sin\frac{3\pi}{9}$, tức là hai đỉnh có chỉ số có cùng số dư khi chia cho 3. Giả sử ngược lại, trong hai tam giác cần lập, không có tam giác nào có cạnh là $2R.\sin\frac{3\pi}{9}$, khi đó đỉnh A_2 phải nối với A_4 và A_4 phải nối với A_8, nhưng khi đó A_8 được nối với A_2 là hai đỉnh có chỉ số chia cho 3 cùng dư là 2, mâu thuẫn. Do đó, trong hai tam giác lập được, luôn có một cạnh có độ dài là $2R.\sin\frac{3\pi}{9}$. Suy ra trường hợp này luôn có tam giác thỏa mãn đề bài.

- Nếu trong các tam giác đó, không có tam giác nào đều . Khi đó các tam giác được xét không có ba đỉnh cùng thuộc một trong ba tập hợp sau: $\alpha_1 = \{A_1, A_4, A_7\}$, $\alpha_2 = \{A_2, A_5, A_8\}$, $\alpha_3 = \{A_3, A_6, A_9\}$. Ta thấy một đoạn thẳng nối hai điểm bất kì thuộc hai tập khác nhau sẽ nhận 1 trong 3 giá trị là a_1, a_2, a_4. Hơn nữa, không có tam giác nào có độ dài 3 cạnh là (a_1, a_2, a_4) nên ta có hai nhận xét:

(1) Một tam giác có các đỉnh thuộc cả ba tập $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nói trên thì sẽ có hai cạnh nào đó có độ dài bằng nhau (các cạnh của nó có thể là (a_1, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_4), (a_4, a_4, a_1)) tức là nó phải cân.

(2) Một tam giác có hai trong ba đỉnh thuộc cùng một tập thì tam giác đó các cạnh có độ dài là (a_2, a_3, a_4) hoặc là (a_1, a_3, a_4), tức là tam giác đó không cân.

* Ta xét tiếp các trường hợp (các tam giác xét dưới đây là cân nhưng không đều):

+ *Có hai tam giác cân và một tam giác không cân*: khi đó theo nhận xét (1), hai tam giác cân đó phải có đỉnh thuộc các tập hợp khác nhau trong ba tập $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; khi đó, rõ ràng tam giác còn lại cũng phải có đỉnh thuộc các tập hợp khác nhau, tức là nó phải cân, mâu thuẫn.

Vậy trường hợp này không tồn tại.

+ *Có một tam giác cân và hai tam giác không cân*: khi đó theo nhận xét (2), hai tam giác không cân đó phải có hai đỉnh thuộc cùng một tập hợp và đỉnh còn lại thuộc tập hợp khác, giả sử một tam giác có hai đỉnh thuộc α_1 và một đỉnh thuộc α_2; rõ ràng tam giác không cân còn lại phải có hai đỉnh thuộc α_2, một đỉnh thuộc α_3, suy ra tam giác còn lại có hai đỉnh thuộc α_3, một đỉnh thuộc α_1 nên nó là tam giác cân, mâu thuẫn.

Vậy tương tự như trên, trường hợp này không tồn tại.

+ *Cả ba tam giác đều không cân*: khi đó theo nhận xét (2), tam giác đó thuộc một trong hai dạng (a_2, a_3, a_4) hoặc là (a_1, a_3, a_4), tức là các tam giác này luôn chứa 1 cạnh có độ dài là a_3.

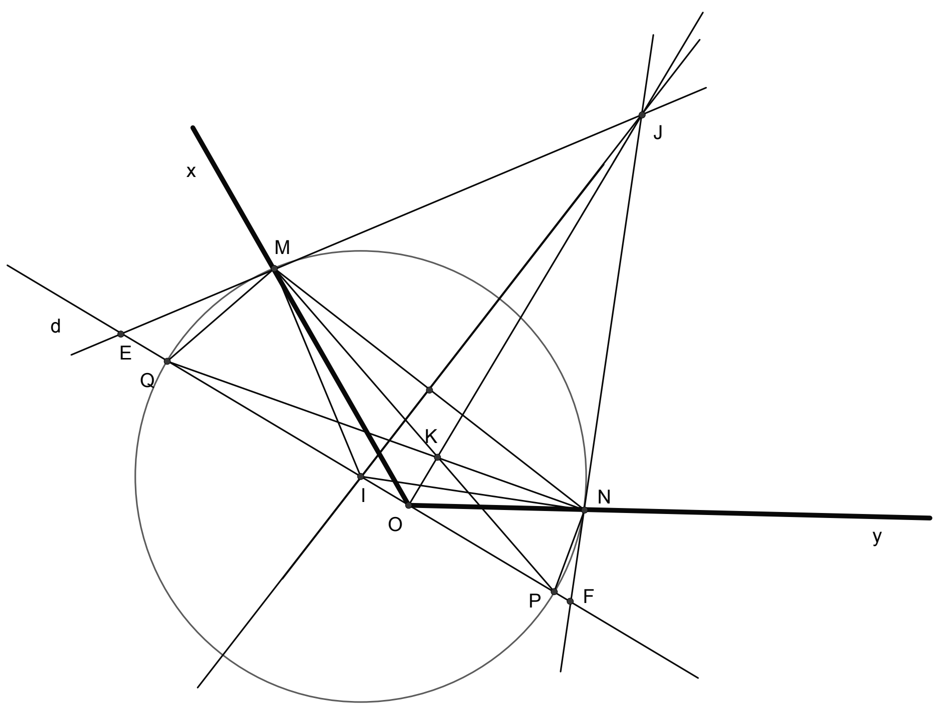
Trong trường hợp này, bài toán được giải quyết.

+ *Cả ba tam giác đều cân*: khi đó, các tam giác có độ dài là (a_1, a_1, a_2), (a_2, a_2, a_4), (a_4, a_4, a_1).
Rõ ràng không tồn tại trường hợp có độ dài các cạnh lần lượt nhận cả ba giá trị như ba bộ trên nên phải có hai bộ trùng nhau, tức là có ít nhất hai tam giác cân bằng nhau và một tam giác cân nhận một trong ba giá trị thuộc một trong các bộ trên làm cạnh, khi đó luôn có thể chọn từ tam giác này một cạnh bằng với cạnh đáy hoặc cạnh bên của hai tam giác cân bằng nhau kia.
Trong trường hợp này, bài toán cũng được giải quyết.
Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có đpcm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA DỰ THI IMO 2008

***Bài 1**. Trong mặt phẳng cho góc xOy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy. Gọi d là đường phân giác góc ngoài của góc xOy và I là giao điểm của trung trực MN với đường thẳng d. Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng d sao cho $IM = IN = IP = IQ$, giả sử K là giao điểm của MQ và NP.*

1. ***Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.***
2. ***Gọi d_1 là đường thẳng vuông góc với IM tại M và d_2 là đường thẳng vuông góc với IN tại N. Giả sử các đường thẳng d_1, d_2 cắt đường thẳng d tại E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.***



1. Xét trường hợp các điểm M, Q và N, P nằm cùng phía với nhau so với trung trực của MN. Khi đó giao điểm K của MP và NQ thuộc các đoạn này.:

Gọi I' là giao điểm của d với đường tròn ngoại tiếp ΔMON. Do d là phân giác ngoài của $\widehat{MON}$ nên I' chính là trung điểm của cung $\widehat{MON}$, do đó: I'M = I'N hay I' chính là giao điểm của trung trực MN với d. Từ đó, suy ra: $I \equiv I'$ hay tứ giác MION nội tiếp.

Ta được: $\widehat{NIO} = \widehat{NMO}$.

Mặt khác: do IM = IN = IP = IQ nên tứ giác MNPQ nội tiếp trong đường tròn tâm I, đường kính PQ $\Rightarrow \widehat{PIN} = 2\widehat{PMN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung $\widehat{PN}$).

Từ các điều trên, ta có: $\widehat{NMO} = 2\widehat{PMN} \Rightarrow$ MP là phân giác trong của $\widehat{OMN}$.

Tương tự, ta cũng có: NQ là phân giác trong của $\widehat{ONM}$.
Do K là giao điểm của MP và NQ nên K chính là tâm đường tròn nội tiếp của ΔMON, suy ra K thuộc phân giác trong của $\widehat{xOy}$, tức là K thuộc một đường thẳng cố định (đpcm).

- Nếu giao điểm K nằm ngoài các đoạn MP và NQ: ta cũng có lập luận tương tự và có được K là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{MON}$ của tam giác ΔMON, tức là K cũng thuộc phân giác trong của $\widehat{xOy}$, là một đường thẳng cố định.

Trong mọi trường hợp, ta luôn có đpcm.

2. Gọi J là giao điểm của d_1 và d_2. Ta thấy tứ giác MINJ nội tiếp trong đường tròn đường kính IJ. Hơn nữa: MION cũng là tứ giác nội tiếp nên 5 điểm M, N, I, J, O cùng thuộc một đường tròn. Do đó: phân giác trong góc $\widehat{MON}$ đi qua trung điểm của cung $\widehat{MJN}$.

Rõ ràng M, N đối xứng nhau qua trung trực của MN nên JM = JN, tức là J cũng là trung điểm của cung $\widehat{MON}$.

Từ đó suy ra: J thuộc phân giác trong của $\widehat{MON}$ hay O, K, J thẳng hàng.
Ta cần chứng minh các đoạn JO, EN và MF trong ΔJEF đồng quy.

Thật vậy: $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{S_{OEJ}}{S_{OFJ}} = \dfrac{JO.JE.\sin OJE}{JO.JF.\sin OJF} = \dfrac{JE}{JF}.\dfrac{\sin OJE}{\sin OJF}$.

Trong ΔJEF và ΔMON, ta có : $\dfrac{JE}{JF} = \dfrac{\sin JFE}{\sin JEF}, \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{\sin ONM}{\sin OMN}$.

Mặt khác : $\widehat{OJE} = \widehat{OJN} = \widehat{ONM}, \widehat{OJF} = \widehat{OJM} = \widehat{OMN} \Rightarrow \dfrac{\sin OJE}{\sin OJF} = \dfrac{\sin ONM}{\sin OMN}$.

Kết hợp lại, ta được : $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{\sin JFE}{\sin JEF}.\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{\sin OFN}{\sin OEM}.\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{\sin OFN}{\sin OEM}.\dfrac{OM}{ON}$

$$= \frac{\sin OFN}{ON.\sin NOF}.\frac{OM.\sin MOE}{\sin OEM} = \frac{ME}{NF}.$$

Do đó : $\dfrac{OE}{OF}.\dfrac{FN}{EM} = 1 \Rightarrow \dfrac{OE}{OF}.\dfrac{NF}{NJ}.\dfrac{MJ}{ME} = 1$.

Theo định lí Ceva đảo, ta có OI, EN và MF đồng quy. Đây chính là đpcm.

<u>Bài 2</u>. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương m sao cho tồn tại các đa thức với hệ số thực $P(x), Q(x), R(x,y)$ thỏa mãn điều kiện:

Với mọi số thực a, b mà $a^m - b^2 = 0$, ta luôn có $P(R(a,b)) = a$ và $Q(R(a,b)) = b$.

Với m là một số nguyên dương, ta xét các trường hợp :

- Nếu m là số chẵn, đặt $m = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra : $a^m - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \pm a^k$. Khi đó cần tìm k sao cho các đa thức $P(x),\ Q(x),\ R(x,\ y)$ thỏa mãn cả hai điều kiện :

(1) $P(R(x,x^k)) = x, Q(R(x,x^k)) = x^k, \forall x \in \mathbb{R}$.

(2) $P(R(x,-x^k)) = x, Q(R(x,-x^k)) = -x^k, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét đa thức một biến T(x) thỏa mãn : $R(x,x^k) = T(x), \forall x$. Theo giả thiết thì $P(T(x)) = P(R(x,x^k)) = x, \forall x$. Từ đó suy ra : $\deg P(x).\deg T(x) = 1$ hay $\deg P(x) = \deg T(x) = 1$.
Giả sử $T(x) = ux + v,\ u, v \in \mathbb{R}, u \neq 0$, $P(x) = u'.x + v',\ u', v' \in \mathbb{R}, u' \neq 0$ thì

$u'(ux+v) + v' = x, \forall x \Rightarrow u.u' = 1, u'v + v' = 0$ hay $u' = \dfrac{1}{u}, v' = -\dfrac{v}{u} \Rightarrow P(x) = \dfrac{x-v}{u}$.

Mặt khác : $Q(R(x,x^k)) = Q(T(x)) = Q(ux+v) = x^k \Rightarrow Q(x) = \left(\dfrac{x-u}{u}\right)^k = P^k(x), \forall x$.

Suy ra : $Q(R(a,b)) = P^k(R(a,b)) \Rightarrow b = a^k,\ \forall a,b$ thỏa $a^m - b^2 = 0$. Nhưng theo điều kiện ban đầu thì b cũng có thể là $-a^k$. Mâu thuẫn này cho thấy các giá trị m trong trường hợp này không thỏa mãn đề bài.

- Nếu m là số lẻ. Đặt $P(x^2, x^m) = S(x)$. Suy ra :

$P(S(x)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \deg P(x).\deg S(x) = 2$.

Nếu như degS(x) = 2 thì $\deg Q(S(x))$ là số chẵn, trong khi đó : $\deg Q(S(x)) = \deg x^m = m$ với m là số lẻ, mâu thuẫn. Suy ra : degS(x) = 1, degP(x) = 2.
Mặt khác, trong đa thức $R(x^2, x^m)$, bậc của nó có thể đạt giá trị nhỏ nhất là $\min(2,m)$ mà $\deg R(x^2,x^m) = \deg S(x) = 1$ nên m = 1.

Ta sẽ chứng minh rằng giá trị m = 1 này thỏa mãn đề bài bằng cách chỉ ra các đa thức P(x), Q(x), R(x, y) thỏa mãn đề bài.

Thật vậy :

Xét các đa thức $P(x) = x^2, Q(x) = x, R(x,y) = y$.

Khi đó với m = 1 thì ta có quan hệ của a với b chính là : $a = b^2$. Suy ra : $R(a,b) = b$, $P(R(a,b)) = P(b) = b^2 = a$, $Q(R(a,b)) = P(b) = b$, thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả các giá trị m thỏa mãn đề bài là m = 1.

<u>Bài 3</u>. Cho số nguyên $n > 3$. Kí hiệu T là tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên. Một tập con S của T được gọi là tập khuyết trong T nếu S có tính chất: Tồn tại số nguyên dương c không vượt quá $\frac{n}{2}$ sao cho với s_1, s_2 là hai số bất kì thuộc S ta luôn có $|s_1 - s_2| \neq c$.

Hỏi tập khuyết trong T có thể có tối đa bao nhiêu phần tử ?

Trước hết ta thấy rằng: Nếu S là tập khuyết trong T thì tập $S' = \{n - x \mid x \in S\}$ cũng là một tập khuyết trong T.

Thật vậy: Giả sử ngược lại S' không phải là tập khuyết, khi đó tồn tại hai số nguyên dương $s'_1, s'_2 \in S'$ sao cho $|s'_1 - s'_2| = c$ với c là một số nguyên dương nào đó không vượt quá $\frac{n}{2}$, Khi đó xét tương ứng hai phần tử $s_1 = n - s'_1, s_2 = n - s'_2$ thì rõ ràng $s_1, s_2 \in S$ và $|s_1 - s_2| = |(n - s'_1) - (n - s'_2)| = |s'_1 - s'_2| = c$, tức là tồn tại hai phần tử $s_1, s_2 \in S$ và $|s_1 - s_2| = c \leq \frac{n}{2}$ trong khi S là tập khuyết. Mâu thuẫn này suy ra nhận xét trên được chứng minh.

Hơn nữa, do $|S| = |S'|$ nên khi S có số các phần tử là lớn nhất thì tương ứng cũng có tập S' có số phần tử lớn nhất bằng với S.

Từ đó, ta thấy có thể xét các tập khuyết S có số các số phần tử không vượt quá $\frac{n}{2}$ không ít hơn số các số phần tử lớn hơn $\frac{n}{2}$. Xét hai tập hợp sau:

$A = \{x \mid x \in S, x \leq \frac{n}{2}\}$, $B = \{x \mid x \in S, x > \frac{n}{2}\}$ thì $A \cap B = \varnothing, A \cup B = S$ và theo cách xác định S như trên thì $|A| \geq |B|$.

Khi đó với c là một số nguyên dương nào đó không vượt quá $\frac{n}{2}$, ta xét tập hợp: $C = \{x + c \mid x \in A\}$. Ta có: $|A| = |C|$. Do $A \subset S$ nên A cũng là một tập khuyết và khi đó rõ ràng $A \cap C = \varnothing, B \cap C = \varnothing$ (vì nếu ngược lại thì tồn tại hai phần tử thuộc S mà hiệu của chúng là c, mâu thuẫn).

Suy ra tất cả các phần tử thuộc tập A hoặc B hoặc C đều là một số nguyên dương không vượt quá n, tức là $(A \cup B \cup C) \subset T \Rightarrow |A| + |B| + |C| \leq |T| = n$.

Kết hợp các điều này lại, ta được: $2|A| + |B| \leq n$. Do đó: $|A| + |B| \leq \frac{4|A| + 2|B|}{3} \leq \frac{2n}{3}$.

Hơn nữa: $A \cap B = \varnothing, A \cup B = S$ và $|S|$ là số nguyên nên $|S| = |A| + |B| \leq \left[\frac{2n}{3}\right]$.

Do đó số phần tử của tập khuyết S trong T luôn không vượt quá $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

*Ta sẽ chỉ ra một tập khuyết thỏa mãn đề bài có đúng $\left[\frac{2n}{3}\right]$ phần tử.

Thật vậy, xét hai tập hợp A, B như sau:

$A=\left\{1,2,3,...,\left[\frac{n+1}{3}\right]\right\}$, $B=\left\{n-\left[\frac{n}{3}\right]+1,\ n-\left[\frac{n}{3}\right]+2,...,n\right\}$ và $S=A\cup B$.

Chọn $c=\left[\frac{n+1}{3}\right]\le\frac{n}{2}$. Ta thấy:

- Hiệu hai phần tử bất kì trong A không vượt quá $\left[\frac{n+1}{3}\right]-1<\left[\frac{n+1}{3}\right]$.
- Hiệu hai phần tử bất kì trong B không vượt quá $n-(n-\left[\frac{n}{3}\right]+1)=\left[\frac{n}{3}\right]-1<\left[\frac{n+1}{3}\right]$.
- Hiệu một phần tử bất kì thuộc B với một phần tử bất kì thuộc A không nhỏ hơn:
  $(n-\left[\frac{n}{3}\right]+1)-\left[\frac{n+1}{3}\right]\ge n-\frac{n}{3}-\frac{n+1}{3}+1=\frac{n+2}{3}>\left[\frac{n+1}{3}\right]$.

Khi đó, rõ ràng $S=A\cup B$ là một tập khuyết trong T ứng với giá trị $c=\left[\frac{n+1}{3}\right]\le\frac{n}{2}$.

Ta sẽ chứng minh rằng $|S|=\left[\frac{2n}{3}\right]$. Từ cách xác định A, B, ta có: $|A|=\left[\frac{n+1}{3}\right], B=\left[\frac{n}{3}\right]$.

Ta cần có: $\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right],\forall n\in\mathbb{N}$ (*).

*Xét các trường hợp:

- Nếu n chia hết cho 3, tức là n có dạng $3m, m\in\mathbb{N}$. Suy ra:
  $\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{3m+1}{3}\right]+\left[\frac{3m}{3}\right]=m+m=2m=\frac{6m}{3}=\left[\frac{2n}{3}\right]$.
- Nếu n chia 3 dư 1, tức là n có dạng $3m+1, m\in\mathbb{N}$. Suy ra:
  $\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{3m+2}{3}\right]+\left[\frac{3m+1}{3}\right]=m+m=2m=\frac{6m}{3}=\left[\frac{6m+2}{3}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right]$.
- Nếu n chia 3 dư 2, tức là n có dạng $3m+2, m\in\mathbb{N}$. Suy ra:
  $\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{3m+3}{3}\right]+\left[\frac{3m+2}{3}\right]=m+1+m=\frac{6m+3}{3}=\left[\frac{6m+4}{3}\right]=\left[\frac{2n}{3}\right]$.

Từ đó suy ra (*) được chứng minh hay tập hợp S đã cho là tập khuyết có $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của số phần tử của tập khuyết S trong T là $\left[\frac{2n}{3}\right]$.

<u>Bài 4.</u> Cho m, n là các số nguyên dương.
Chứng minh rằng $(2m+3)^n+1$ ***chia hết cho 6m khi và chỉ khi*** 3^n+1 ***chia hết cho 4m.***

Theo khai triển nhị thức Newton thì:

$$(2m+3)^n=(2m)^n+3^n+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k.(2m)^{n-k}.3^k\equiv(2m)^n+3^n(\text{mod } 6\text{m}).$$

Do đó, $6m\,|\,(2m+3)^n+1\Leftrightarrow 6m\,|\,(2m)^n+3^n+1\Leftrightarrow 2m\,|\,(3^n+1)$ và $3\,|\,(2m)^n+1$.

Cần chứng minh rằng: $2m\,|\,(3^n+1)$ và $3\,|\,(2m)^n+1$ (1) $\Leftrightarrow$ $4m\,|\,3^n+1$ (2).

Xét các trường hợp:

* <u>Nếu m là số chẵn</u>:

\- Xét điều kiện (2):

3^n+1 không chia hết cho 4m vì $3^n+1\equiv 2(\text{mod } 8)$ hoặc $3^n+1\equiv 4(\text{mod } 8)$, trong khi $4m\,\vdots\,8$, tức là không thể có điều kiện (2).

\- Xét điều kiện (1): từ m là số chẵn, suy ra $3^n+1\,\vdots\,4\Rightarrow n$ là số lẻ. Ta biết rằng: số có dạng 3n + 1 chỉ có ước nguyên tố lẻ đồng dư với 1 modun 4. Từ đó, suy ra m thỏa mãn: $2m\,|\,(3^n+1)$ phải có dạng $m=2(3k+1),k\in\mathbb{Z}$. Suy ra: $(2m)+1=2^n.2^n.(3k+1)^n+1\equiv 2(\text{mod } 3)\Rightarrow(2m)+1$ không chia hết cho 3, tức là điều kiện (1) cũng không tồn tại.

* <u>Nếu m là số lẻ</u>:

\- Xét điều kiện (1): từ $2m\,|\,(3^n+1)$ suy ra m không chia hết cho 3, từ $3\,|\,(2m)^n+1$ suy ra n phải là số lẻ vì nếu ngược lại thì $(2m)^n+1\equiv 2(\text{mod } 3)$, mâu thuẫn. Mà n là số lẻ thì $3^n+1\,\vdots\,4$, kết hợp với $(m,4)=1$, ta được $4m\,|\,3^n+1$, đây chính là điều kiện (2). Do đó: $(1)\Rightarrow(2)$.

\- Xét điều kiện (2): từ $4m\,|\,3^n+1\Rightarrow(4\,|\,3^n+1)\wedge(m\,|\,3^n+1)$ suy ra n là số lẻ và m có dạng $3k+1,k\in\mathbb{Z}$. Suy ra: $(2m)^n+1=2^n.m^n+1\equiv-1+1\equiv 0(\text{mod } 3)\Rightarrow 3\,|\,(2m)^n+1$; từ (2) ta cũng trực tiếp có $2m\,|\,(3^n+1)$. Do đó: $(2)\Rightarrow(1)$.

Kết hợp các điều trên lại, ta được: $(1)\Leftrightarrow(2)$.

Vậy $(2m+3)^n+1$ chia hết cho 6m khi và chỉ khi 3^n+1 chia hết cho 4m.

Đây chính là đpcm.

<u>Bài 5</u>. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi AD, BE, CF lần lượt là các đường phân giác trong của tam giác. Trên các đường thẳng AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho $\frac{AL}{AD}=\frac{BM}{BE}=\frac{CN}{CF}=k$ (k là hằng số dương). Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C.

1. ***Chứng minh rằng với $k=\frac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung và đường thẳng nối hai điểm đó đi qua trọng tâm tam giác ABC.***
2. ***Tìm tất cả các giá trị k sao cho 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.***

Trước hết, ta nêu 4 bổ đề sau:

(1) Cho ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c và hai đường thẳng phân biệt d, d'. Các đường thẳng d, d' theo thứ tự cắt a, b, c tại $A_1,B_1,C_1;A_2,B_2,C_2$ thỏa mãn điều kiện:
$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}=k$. *Các điểm A_3, B_3, C_3 thuộc a, b, c sao cho:* $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}}$.
Khi đó, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_3C_3}}=k$.

(2) Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c và ba đường thẳng phân biệt khác a', b', c'. Các đường thẳng a', b', c' theo thứ tự cắt a, b, c tại $A_1,B_1,C_1;A_2,B_2,C_2;A_3,B_3,C_3$ (các điểm này đôi một phân biệt). Khi đó nếu $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}=\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_3C_3}}$ *thì hoặc* $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_1B_3}}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_1C_3}}$ *hoặc a, b, c đôi một song song.*

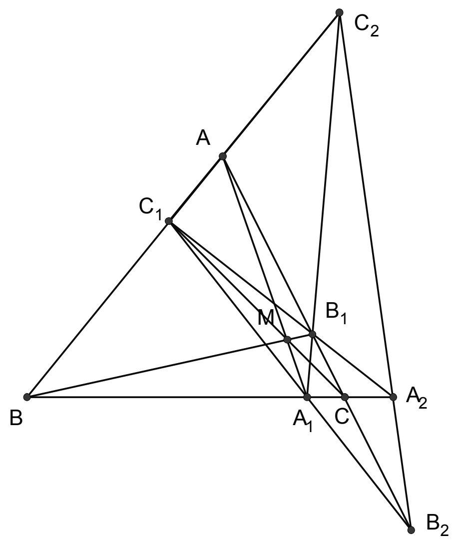
(3) Cho tam giác ABC và M bất kì. Các tia AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB ở A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 cắt các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt ở A_2, B_2, C_2. Các điểm A_3, B_3, C_3 theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho
$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{B_1B_3}}{\overline{B_1B_2}}=\frac{\overline{C_1C_3}}{\overline{C_1C_2}}=k,k\neq 0$. *Khi đó, A_3, B_3, C_3 thẳng hàng khi và chỉ khi $k=1$ hoặc $k=\frac{1}{2}$.*

(4) Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt BC tại M, đường thẳng AD cắt (I) tại N (khác D). Chứng minh rằng: MN tiếp xúc với (I).

Các bổ đề (1), (2) có thể chứng minh dễ dàng bằng các biểu diễn theo vectơ.
Dưới đây trình bày các chứng minh cho bổ đề (3), (4).

***Chứng minh bổ đề (3).**

+ <u>Điều kiện đủ</u>:



- Với k = 1, ta có A_3, B_3, C_3 theo thứ tự trùng với A_2, B_2, C_2. Vì AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy nên theo định lí Menelaus thì $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1$. Vì A_2, B_1, C_1 thẳng hàng nên $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1$. Suy ra: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$.

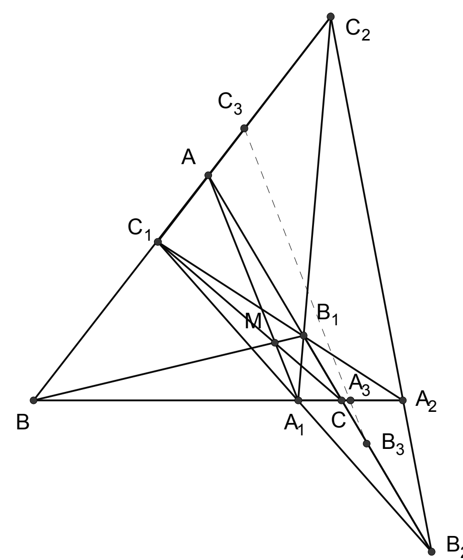
Tương tự: $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}=-\frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}},\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}$.

Nhân từng vế các đẳng thức trên,

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}.\frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}}.\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}=\left(-\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right).\left(-\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right).\left(-\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)=-1.$$

Tức là A_2, B_2, C_2 thẳng hàng hay A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

- Với $k=\frac{1}{2}$, A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Theo chứng minh trên, ta đã có: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$. Theo tính chất tỉ lệ thức thì:



$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=-\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}=\frac{\overline{A_1B}+\overline{A_2B}}{\overline{A_1C}-\overline{A_2C}}=\frac{\overline{A_1B}-\overline{A_2B}}{\overline{A_1C}+\overline{A_2C}}\Rightarrow\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}=\frac{2\overline{A_3B}}{\overline{A_2A_1}}=\frac{\overline{A_2A_1}}{2\overline{A_3C}}$$

Suy ra: $\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}=\frac{2\overline{A_3B}}{\overline{A_2A_1}}.\frac{\overline{A_2A_1}}{2\overline{A_3C}}=\left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right)^2$. Tương tự:

$$\frac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}}=\left(\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right)^2,\frac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}}=\left(\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)^2.$$

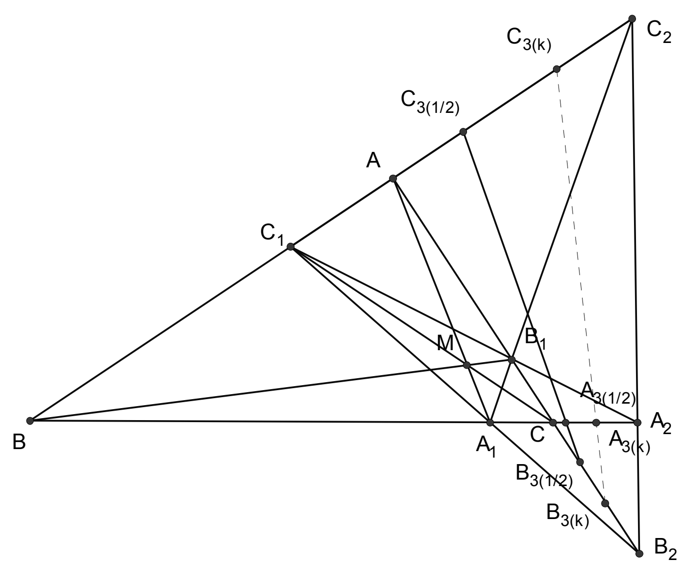
Nhân từng vế các đẳng thức trên, ta được:

$\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}.\frac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}}.\frac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}}=\left(\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\right)^2.\left(\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\right)^2.\left(\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\right)^2=1$. Do đó, A_3, B_3, C_3 th ẳng hàng.

+ <u>Điều kiện cần</u>: Khi $k\neq 1$, ta kí hiệu $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ thay cho A_3, B_3, C_3. Giả sử tồn tại số k đồng thời khác 1 và $\frac{1}{2}$ mà $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ thẳng hàng. Khi đó, các điểm: $A_{3(k)},B_{3(k)},C_{3(k)}$ và $A_{3(1/2)},B_{3(1/2)},C_{3(1/2)}$ đôi một khác nhau. Dễ thấy: $\frac{\overline{A_2A_{3(1/2)}}}{\overline{A_2A_{3(k)}}}=\frac{\overline{B_2B_{3(1/2)}}}{\overline{B_2B_{3(k)}}}=\frac{\overline{C_2C_{3(1/2)}}}{\overline{C_2C_{3(k)}}}=\frac{1/2-1}{k-1}$.

Theo chứng minh ở điều kiện đủ thì hai bộ điểm A_2, B_2, C_2 và $A_{3(1/2)}, B_{3(1/2)}, C_{3(1/2)}$ thẳng hàng, mà theo điều giả sử ở trên thì $A_{3(k)}, B_{3(k)}, C_{3(k)}$ cũng thẳng hàng nên theo bổ đề (2), hoặc đường thẳng $A_2B_2C_2$ và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$ song song hoặc $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}}}{\overline{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}}}$.

+ Nếu $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}}}{\overline{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}}}$ thì chú ý rằng: $\frac{\overline{A_1A_{3(1/2)}}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{B_1B_{3(1/2)}}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{C_1C_{3(1/2)}}}{\overline{C_1C_2}}$, theo bổ đề (1) thì A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, mâu thuẫn.



+ Nếu $A_2B_2C_2$ và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$ song song với nhau thì chú ý rằng $A_{3(1/2)}, B_{3(1/2)}, C_{3(1/2)}$ theo thứ tự là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Ta có:

$\overrightarrow{A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$,

$\overrightarrow{A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2C_2})$. Suy ra:

A_1B_1 song song với A_2B_2 và $A_{3(1/2)}B_{3(1/2)}$, A_1C_1 song song với A_2C_2 và $A_{3(1/2)}C_{3(1/2)}$. Từ đó suy ra, A_1, B_1, C_1 cũng thẳng hàng, mâu thuẫn.

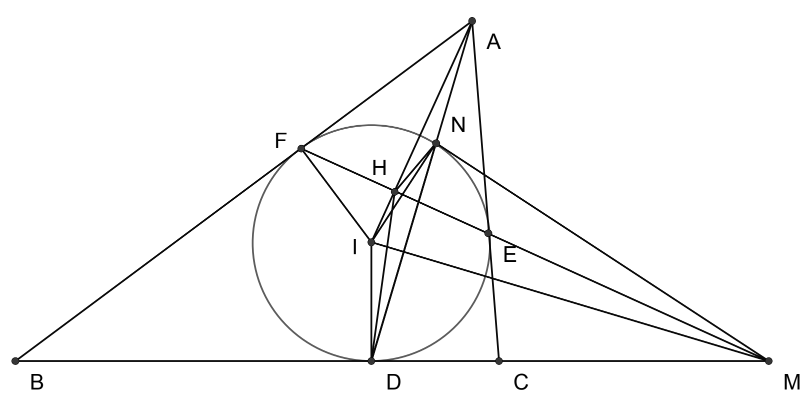
Do đó chỉ có $k = 1$ và $k = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy bổ đề (3) được chứng minh.

***Chứng minh bổ đề (4).**

Gọi H là giao điểm của EF và AI. Ta thấy: $IA \perp EF$. Tam giác AIF vuông tại F có đường cao FH nên : $IF^2 = IH.IA \Rightarrow ID^2 = IH.IA$. Suy ra: $\Delta IDH \sim \Delta IAD(c.g.c)$.

Do đó: $\widehat{IHD} = \widehat{IDA}$. Mặt khác: tam giác IDN cân tại I nên $\widehat{IND} = \widehat{IDN} = \widehat{IDA}$. Từ đó, ta được: $\widehat{IND} = \widehat{IHD}$.

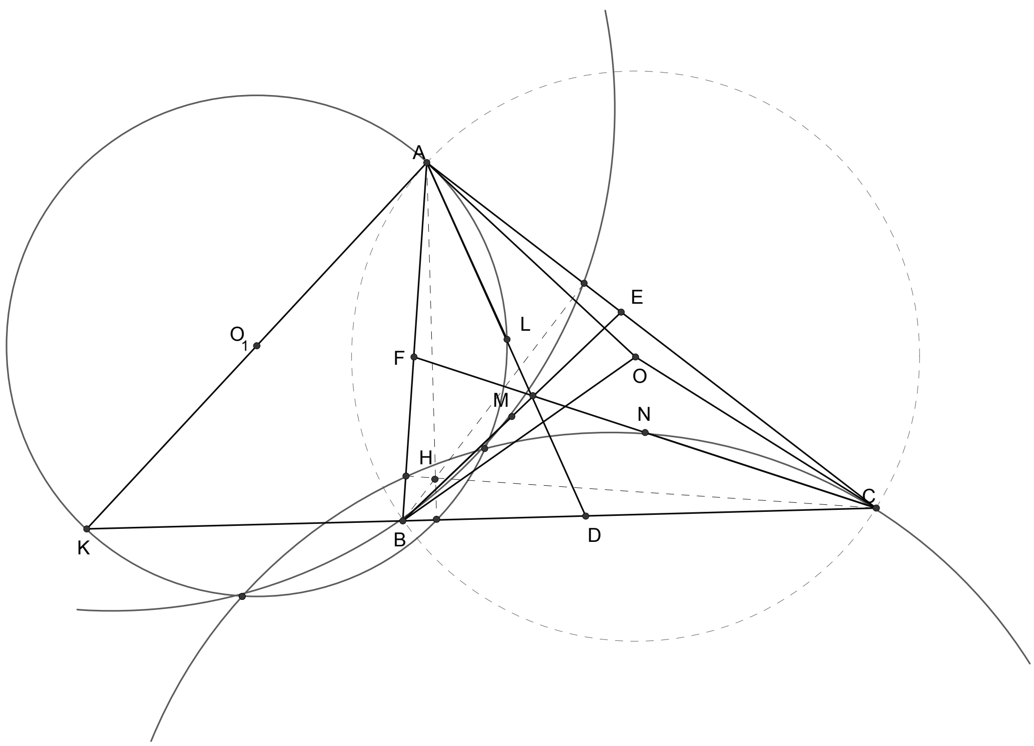


$\Rightarrow$ Tứ giác IDNH nội tiếp. Hơn nữa, tứ giác IDMH cũng nội tiếp vì có $\widehat{IDM} = \widehat{IHM} = 90^0$. Do đó: 5 điểm, I, D, M, N, H cùng thuộc một đường tròn. Suy ra: IMNH nội tiếp hay $\widehat{INM} = \widehat{IHM} = 90^0 \Rightarrow MN \perp IN$. Vậy MN là tiếp tuyến của (I). Bổ đề (4) được chứng minh.

***Trở lại bài toán.**

1. Khi $k=\dfrac{1}{2}$ thì L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, BE, CF.

Gọi H là trực tâm của ΔABC và δ là phương tích của H đối với đường tròn Euler đi qua chân 3 đường cao của ΔABC. Gọi K là giao điểm của đường thẳng AO_1 với đường thẳng BC.
Ta sẽ chứng minh rằng K nằm trên (O_1).
Thật vậy:
Do ΔABC là tam giác nhọn nên O nằm trong tam giác. Ta có:
$\widehat{AOB}=2\widehat{ACB}\Rightarrow\widehat{OAB}=90^0-\widehat{ACB}$.



Không mất tính tổng quát, giả sử tia AD nằm giữa hai tia AO và AB. Khi đó:
$\widehat{OAD}=\widehat{OAB}-\widehat{DAB}=90^0-\widehat{ACB}-\dfrac{\widehat{BAC}}{2}\Rightarrow\widehat{KAD}=90^0-\widehat{OAD}=\widehat{ACB}+\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Mặt khác: $\widehat{ADB}=\widehat{DAC}+\widehat{DCA}=\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ nên $\widehat{KAD}=\widehat{KDA}$.

Ta cũng có $O_1A=O_1L\Rightarrow\Delta AO_1L$ cân tại O_1 nên $\widehat{O_1AL}=\widehat{O_1LA}$.

Từ đó suy ra: $\widehat{O_1LA}=\widehat{KDA}$ hay O_1L // KD, mà L là trung điểm của AD nên O_1 là trung điểm của AK hay K thuộc đường tròn (O_1). Do đó (O_1) cắt BC tại chân đường cao của ΔABC. Từ đó suy ra phương tích của H đối với đường tròn (O_1) chính là δ.
Hoàn toàn tương tự với các đường tròn (O_2), (O_3).

Do H có cùng phương tích đến các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nên H chính là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) .

Hơn nữa: do OA là tiếp tuyến của (O_1) tại A nên phương tích của O đối với (O_1) chính là OA^2 . Tương tự như vậy, phương tích của O đối với đường tròn (O_2) và (O_3) lần lượt là OB^2 , OC^2 , mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC nên OA = OB = OC hay O có cùng phương tích đến các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), suy ra: O cũng là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

Giả sử của 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có 3 trục đẳng phương khác nhau thì chúng phải đồng quy tại tâm đẳng phương, mà O và H cùng là tâm đẳng phương của chúng nên O phải trùng với H hay ΔABC đều, mâu thuẫn với giả thiết ΔABC không cân.

Do đó, điều giả sử trên là sai và 3 đường tròn đã cho phải có 1 trục đẳng phương chung, trục đẳng phương đó chính là đường thẳng đi qua O và H. Ta cũng thấy rằng O nằm ngoài cả 3 đường tròn, H thì nằm giữa các đường cao của ΔABC nên nó nằm trong cả 3 đường tròn.
Suy ra đường thẳng OH cắt cả 3 đường tròn tại 2 điểm nào đó.

Vậy 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng 2 điểm chung, hơn nữa, đường thẳng đi qua hai điểm chung đó chính là đường thẳng OH và do đó, nó cũng sẽ đi qua trọng tâm của tam giác (đường thẳng Euler). Ta có đpcm.

2. Ta sẽ chứng minh rằng ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $k = \frac{1}{2}$. Thật vậy:

   Điều kiện đủ:

   - Khi $k = \frac{1}{2}$, khẳng định đã chứng minh ở câu 1/.

   - Ta sẽ tiếp tục chứng minh rằng với k = 1, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C cũng có đúng hai điểm chung. Thật vậy:

   - Khi k = 1, các điểm L, M, N tương ứng trùng với các điểm D, E, F.

Theo chứng minh ở câu 1/, đường tròn (K, KA) đi qua D và tiếp xúc với OA tại A nên chính là đường tròn (O_1) đang được xét. Gọi d_1, d_2, d_3 là tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, B, C. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của $d_2,\ d_3;\ d_3,\ d_1;\ d_1,\ d_2$.

Vì O_1 thuộc đường thẳng BC và OA tiếp xúc với (O_1) tại A nên O_1 thuộc d_1, từ đó suy ra O_1 chính là giao điểm của BC và d_1.
Tương tự: O_2, O_3 lần lượt chính là giao điểm của CA và d_2, AB và d_3.

Qua các điểm O_1, O_2, O_3 vẽ các tiếp tuyến tới đường tròn (O) lần lượt là O_1T_1, O_2T_2, O_3T_3 (trong đó T_1, T_2, T_3 là các tiếp điểm).
Ta có: $O_1T_1 = O_1A,\ O_2T_2 = O_2B,\ O_3T_3 = O_3C$, tức là T_1, T_2, T_3 cũng tương ứng thuộc các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3).

Theo bổ đề (4) ở trên, (xét tam giác XYZ có (O) là đường tròn nội tiếp) các đường thẳng AT_1, BT_2, CT_3 tương ứng trùng với các đường thẳng AX, BY, CZ.

Hơn nữa, XB = XC, YC = YA, ZA = ZA nên:

$\frac{\overline{AY}}{\overline{AZ}}.\frac{\overline{BZ}}{\overline{BX}}.\frac{\overline{CX}}{\overline{CY}} = -1 \Rightarrow$ AX, BY, CZ đồng quy (theo định lí Ceva đảo trong tam giác XYZ).

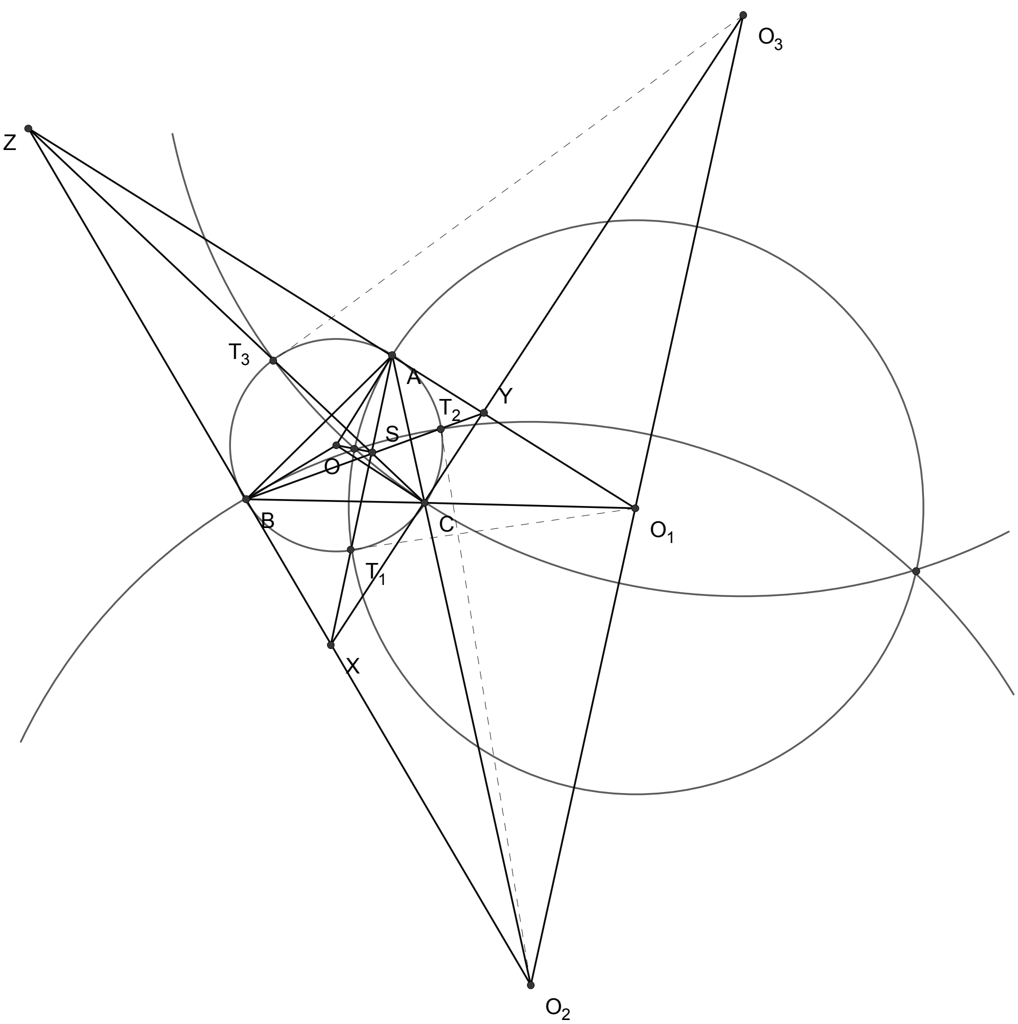
Do đó: AT_1, BT_2, CT_3 đồng quy. Đặt điểm chung của ba đường thẳng đó là S, rõ ràng S nằm trong (O). Do T_1, T_2, T_3 nằm trên (O) nên theo tính chất phương tích:

$\overline{SA.ST_1} = \overline{SB.ST_2} = \overline{SC.ST_3} \Rightarrow P_{S/(O_1)} = P_{S/(O_2)} = P_{S/(O_3)}$.

Tương tự câu 1/, ta có: $P_{O/(O_1)} = P_{O/(O_2)} = P_{O/(O_3)}$, tức là OS là trục đẳng phương chung của ba đường tròn O_1), (O_2), (O_3).

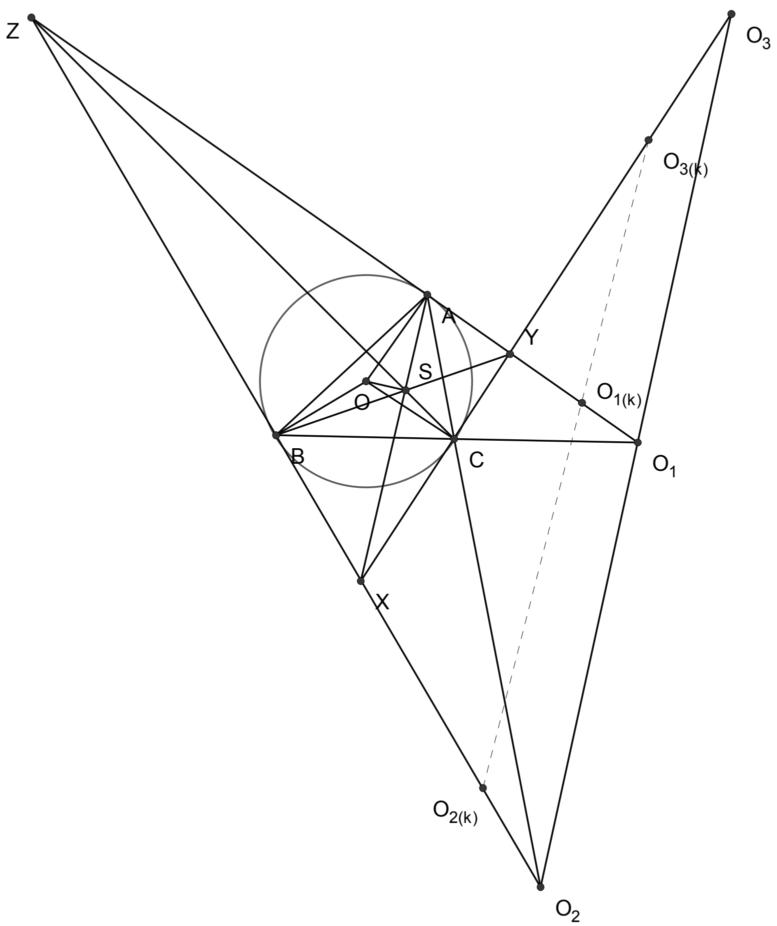
Mặt khác, S nằm trong cả ba đường tròn, O nằm ngoài cả ba đường tròn nên đường thẳng OS cắt cả ba đường tròn tại hai điểm, tức là (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.

Vậy trong trường hợp k = 1, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cũng có đúng hai điểm chung. Điều kiện đủ của khẳng định trên được chứng minh.



***Điều kiện cần**:

Với một giá trị $k > 0, k \neq 1$, gọi $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ lần lượt là tâm của các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với (O) tại A; đi qua M, tiếp xúc với (O) tại B, đi qua N, tiếp xúc với (O) tại N.



Giả sử các đường tròn $\left(O_{1(k)}\right), \left(O_{2(k)}\right), \left(O_{3(k)}\right)$ nói trên có đúng hai điểm chung, tức là ba tâm của chúng là $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ thẳng hàng. (1)

Gọi d_1, d_2, d_3 là tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A, B, C. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của d_2, d_3; d_3, d_1; d_1, d_2. Chứng minh tương tự như trên, AX, BY, CZ đồng quy. (2)

Đặt O_1, O_2, O_3 là giao điểm của BC với YZ, CA với ZX, AB với XY. Dễ thấy rằng: $O_{1(k)}, O_{2(k)}, O_{3(k)}$ lần lượt thuộc các đoạn thẳng AO_1, BO_2, CO_3

và $\dfrac{\overline{AO_{1(k)}}}{\overline{AO_1}} = \dfrac{AL}{AD}$, $\dfrac{\overline{BO_{2(k)}}}{\overline{BO_2}} = \dfrac{BM}{BE}$, $\dfrac{\overline{CO_{3(k)}}}{\overline{CO_3}} = \dfrac{CN}{CF}$.

Suy ra:

$$\frac{\overline{AO_{1(k)}}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{BO_{2(k)}}}{\overline{BO_2}} = \frac{\overline{CO_{3(k)}}}{\overline{CO_3}} = k. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3), áp dụng bổ đề 3, ta có $k = 1$ hoặc $k = \dfrac{1}{2}$.

Do đó, nếu các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung thì $k = 1$ hoặc $k = \dfrac{1}{2}$.

Điều kiện cần của khẳng định được chứng minh.

Vậy tất cả các giá trị k cần tìm là $k = 1$ và $k = \dfrac{1}{2}$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

<u>Bài 6</u>. Kí hiệu M là tập hợp gồm 2008 số nguyên dương đầu tiên. Tô tất cả các số thuộc M bởi ba màu xanh, vàng, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu và mỗi màu đều được dùng để tô ít nhất một số. Xét các tập hợp sau:

$S_1 = \{(x,y,z) \in M^3$, ***trong đó x, y, z có cùng màu và*** $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$ ***;***

$S_1 = \{(x,y,z) \in M^3$, ***trong đó x, y, z đôi một khác màu và*** $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{2008}\}$***.***

Chứng minh rằng $2|S_1| > |S_2|$***. (Kí hiệu*** M^3 ***là tích Đề các*** $M \times M \times M$ ***) .***

*Trước hết ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

"Với n là số nguyên dương, xét tập hợp M = {1, 2, 3, …, n}. Tô màu các phần tử của S bởi màu xanh hoặc đỏ. Xét các tập hợp sau:

$S_1 = \{(x,y,z) \in M^3$, *trong đó x, y, z cùng màu và* $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{n}\}$ *;*

$S_2 = \{(x,y,z) \in M^3$, *trong đó x, y, z khác màu và* $(x+y+z) \equiv 0 \pmod{n}\}$.

Giả sử rằng trong M có a số được tô màu đỏ và b số được tô màu xanh (với a + b = n) thì $|S_1| = a^2 - ab + b^2$, $|S_2| = 3ab$*."*

Thật vậy:

Ta chọn một số x được tô màu đỏ, một số y được tô màu xanh, $x \neq y$. Giả sử z là một số thuộc S mà $n \mid (x+y+z)$, rõ ràng z tồn tại và duy nhất (z có thể trùng với x hoặ y). Không mất tính tổng quát, giả sử z được tô màu đỏ, cùng màu với x.

Xét hai trường hợp:

- Nếu z khác cả x và y. Khi đó cả ba số x, y, z là phân biệt. Khi đó, ta có tất cả 6 bộ ba thuộc tập S_2 chứa cả x và y là: $(x,y,z);\ (x,z,y);\ (y,x,z);\ (y,z,x);\ (z,x,y);\ (z,y,x)$.
Nếu không tính đến thứ tự của x và y thì chỉ có 3 bộ trong các bộ trên thuộc S_2. Thật vậy: khi xét x đứng trước z trong các bộ trên, ta có 3 bộ ba là: $(x,y,z);(x,z,y);(y,x,z)$.

Tương tự, lại xét các bộ không tính đến thứ tự của z và y (chú ý rằng ở trêm, ta giả sử x và x cùng màu), xét x đứng sau z trong các bộ này, ta cũng có 3 bộ ba nữa là: $(z,x,y);(z,y,x);(y,z,x)$. Do đó, trong trường hợp này, ta có tất cả 3 bộ thuộc S_2.

- Nếu z bằng x hoặc z bằng y. Không mất tính tổng quát, giả sử z = x (trường hợp z = y hoàn toàn tương tự, không quan tâm đến màu của chúng nữa). Khi đó, ta cũng có các bộ 3 thuộc tập S_2 chứa cả x và y là: $(x,x,y);(x,y,x);(y,x,x)$ (chỉ xét các bộ không tính đến thứ tự của x, y).

Do đó, trong cả hai trường hợp, mỗi bộ không tính đến thứ tự (x, y) với x, y khác màu nhau cho ta đúng 3 phần tử trong tập T_2 và mỗi phần tử như vậy xuất hiện đúng một lần. Suy ra giá trị của $|S_2|$ bằng 3 lần số bộ không tính đến thứ tự (x, y) đã nêu.

Mặt khác: có a số được tô màu đỏ, b số được tô màu xanh nên số bộ (x, y) nói trên chính là ab, từ đó ta được: $|S_2| = 3ab$. Với x, y cho trước thì số z thỏa mãn $n \mid (x+y+z)$ là duy nhất. Cả x và y được chọn đúng n lần nên $|S_1 \cup S_2| = n^2 = (a+b)^2$, hơn nữa: $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ nên $|S_1| + |S_2| = (a+b)^2 \Rightarrow |S_1| = (a+b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2$.

Bổ đề được chứng minh.

***Trở lại bài toán:**

Giả sử số các số được tô màu xanh, vàng, đỏ lần lượt là a, b, c thì : $a+b+c=2008;\ a,b,c\in\mathbb{N}^*$.

-Xét tập hợp:

$A=\{(x,y,z)\in M^3\mid$ x, y, z được tô cùng màu xanh và $x+y+z\equiv 0\pmod{2008}\}$.

Các tập B, C định nghĩa tương tự, ứng với các màu vàng và đỏ.

-Xét tập hợp:

$AB=\{(x,y,z)\in M^3\mid$ x, y, z được tô bởi hai màu xanh, vàng và $x+y+z\equiv 0\pmod{2008}\}$

Các tập BC, CA được định nghĩa tương tự, ứng với các cặp màu vàng, đỏ và đỏ, xanh.

- Xét tập hợp :

$ABC=\{(x,y,z)\in M^3\mid$x, y, z được tô bởi cả ba màu xanh, vàng, đỏ và $x+y+z\equiv 0\pmod{2008}\}$

Tiếp theo, ta sẽ dùng bổ đề trên đánh giá số phần tử của các tập hợp trên:

Gọi c là màu đại diện cho hai màu xanh và vàng, khi đó: số bộ ba được tô cùng màu chính là: $A\cup B\cup C\cup AB$ và số bộ ba tô khác màu chính là: $ABC\cup BC\cup CA$.

Ta có: $|A|+|B|+|C|+|AB|=(a+b)^2-c(a+b)+c^2, |ABC|+|BC|+|CA|=3c(a+b)$.

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$|A|+|B|+|C|+|BC|=(b+c)^2-a(b+c)+a^2, |ABC|+|CA|+|AB|=3(a(b+c)$.

$|A|+|B|+|C|+|CA|=(c+a)^2-b(c+a)+b^2, |ABC|+|AB|+|BC|=3b(c+a)$.

Theo cách xác định như trên thì:

$S_1=A\cup B\cup C\Rightarrow |S_1|=|A|+|B|+|C|,\ S_2=ABC\Rightarrow |S_2|=|ABC|$

Cộng từng vế tương ứng của nhóm thứ nhất rồi nhân với hai, ta được:

$6(|A|+|B|+|C|)+2(|AB|+|BC|+|CA|)=3(a^2+b^2+c^2)$.

Cộng từng vế tương ứng của nhóm thứ hai, ta được:

$3|ABC|+2(|AB|+|BC|+|CA|)=6(ab+bc+ca)$.

Suy ra: $6(|A|+|B|+|C|)-3|ABC|=3\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$.

Do đó: $2|S_1|-|S_2|\geq 0$.

Đẳng thức không xảy ra vì không tồn tại $a=b=c$ nguyên dương và $a+b+c=2008$.

Vậy bất đẳng thức ở trên là thực sự, tức là $2|S_1|-|S_2|>0\Leftrightarrow 2|S_1|>|S_2|$.

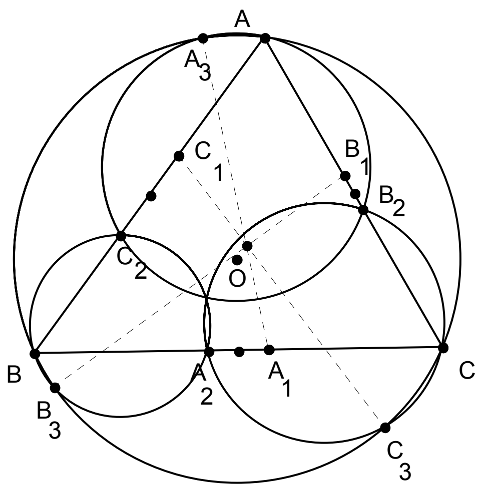
Đây chính là đpcm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

DỰ THI IMO 2009

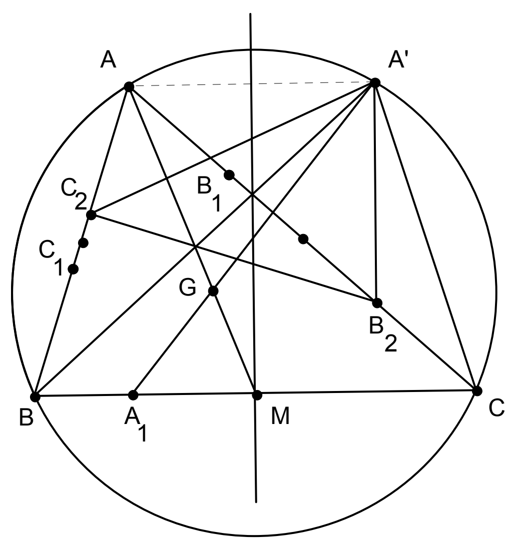
<u>Bài 1</u>. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 ***và*** A_2, B_2, C_2 ***lần lượt là các chân đường cao của tam giác ABC hạ từ các đỉnh*** A, B, C ***và các điểm đối xứng với*** A_1, B_1, C_1 ***qua trung điểm của các cạnh*** BC, CA, AB***. Gọi*** A_3, B_3, C_3 ***lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác*** $AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2$ ***với (O).***

Chứng minh rằng: A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 ***đồng quy.***



Ta sẽ chứng minh các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 cùng đi qua trọng tâm của tam giác ABC. Thật vậy:

Gọi M là trung trực của BC, A' là điểm đối xứng với A qua trung trực của BC. Ta sẽ chứng minh rằng A' trùng với A_3 hay đường tròn (AB_2C_2) cắt (O) tại A'.



Ta có: A, A' đối xứng nhau qua trung trực của BC nên: $AB = A'C, AC = A'B$. Do A, B và C_1, C_2 cùng đối xứng với nhau qua trung điểm của AB nên $BC_2 = AC_1$. Tương tự: $CB_2 = AB_1$. Suy ra:

$$\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Kết hợp với $\widehat{C_3BA'} = \widehat{B_3CA'}$ (cùng chắn cung AA')

ta được: $\Delta C_2BA' \sim \Delta B_2CA' \quad (c.g.c) \Rightarrow \widehat{BC_2A'} = \widehat{CB_2A'} \Rightarrow \widehat{AC_2A'} = \widehat{AB_2A'}$.

Do đó, tứ giác AC_2B_2A' là tứ giác nội tiếp hay A' trùng với A_3. Gọi G là giao điểm của trung tuyến AM với A_1A_3. Do AA_3 // A_1M nên: $\frac{AG}{GM} = \frac{AA_3}{A_1M} = 2 \Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABC hay đường thẳng A_1A_3 đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Tương tự: B_1B_3, C_1C_3 cũng đi qua G.

Vậy các đường thẳng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.

Cho đa thức $P(x)=rx^3+qx^2+px+1$ ***trong đó*** $p,\ q,\ r$ ***là các số thực và*** $r\ >\ 0$***.***

Xét dãy số sau:

$$\begin{cases} a_1=1,\ \ a_2=-p,\ \ a_3=p^2-q \\ a_{n+3}=-p.a_{n+2}-q.a_{n+1}-r.a_n, \quad n\ge 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: nếu đa thức $P(x)$ ***có một nghiệm thực duy nhất và không có nghiệm bội thì dãy số*** $\left(a_n\right)$ ***có vô số số âm.***

* Giả sử k là một nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức:
$Q(x)=x^3+px^2+qx+r$, do r > 0 nên $k\neq 0 \Rightarrow k^3+pk^2+qk+r=0$ (*)
Theo giả thiết, đa thức $P(x)=rx^3+qx^2+px+1$ có đúng một nghiệm thực nên nó còn có thêm hai nghiệm phức liên hợp nữa, đồng thời $\frac{1}{k}$ chính là nghiệm của P(x) do:

$$P(\frac{1}{k})=r\left(\frac{1}{k}\right)^3+q\left(\frac{1}{k}\right)^2+p\left(\frac{1}{k}\right)+1=\frac{r+qk+pk^2+k^3}{k^3}=0\ .$$

Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức:

$$u_{n+1}=a_{n+3}+(p+k)a_{n+2}-\frac{r}{k}a_{n+1} \qquad (**)$$

Mặt khác, theo giả thiết: $a_{n+3}=-pa_{n+2}-qa_{n+1}-ra_n,\ \ n=0,1,2,...$
Ta có:

$$u_{n+1}=-pa_{n+2}-qa_{n+1}-ra_n+(p+k)a_{n+2}-\frac{r}{k}a_{n+1}=ka_{n+2}-\frac{kq+r}{k}.a_{n+1}-ra_n$$

$$=k(a_{n+2}-\frac{kq+r}{k^2}.a_{n+1}-\frac{r}{k}a_n)$$

Từ (*) $\Rightarrow -(kq+r)=pk^2+k^3 \Rightarrow -\frac{kq+r}{k^2}=p+k$, do đó:

$$u_{n+1}=k(a_{n+2}+(p+k)a_{n+1}-\frac{r}{k}a_n)=ku_n,\quad n=0,1,2,...$$

Trong (**), cho n = -1, ta có:

$$u_0=a_2+(p+k)a_1-\frac{r}{k}a_0=p^2-q-(p+k)p-\frac{r}{k}=-\frac{pk^2+qk+r}{k}=\frac{k^3}{k}=k^2$$

Suy ra: $u_n=k^{n+2}\Rightarrow a_{n+2}+(p+k)a_{n+1}-\frac{r}{k}a_n=k^{n+2},\quad n=0,1,2,...$ (***)

Giả sử z là nghiệm phức của phương trình P(x) = 0 và ρ, θ lần lượt là modun và argument của z trong đó: $\rho, \theta \in \mathbb{R}, \rho > 0$.

Ta có: $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ và $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nên: $P(z) = 0 \Rightarrow \overline{P(z)} = 0 \Rightarrow P(\overline{z}) = 0$ do đó: $\overline{z} = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$ cũng là nghiệm của P(x).

Từ (***), ta được: $a_{n+2} + (p+z)a_{n+1} - \frac{r}{z}a_n = (z)^{n+2}$, $a_{n+2} + (p+\overline{z})a_{n+1} - \frac{r}{\overline{z}}a_n = (\overline{z})^{n+2}$.

Theo công thức Moavre, ta có: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ nên:

$$z^{n+2} - \left(\overline{z}\right)^{n+2} = \rho^{n+2}\left[\cos(n+2)\theta + i\sin(n+2)\theta\right] - \rho^{n+2}\left[\cos(n+2)\theta - i\sin(n+2)\theta\right] =$$

$$= 2i.\rho^{n+2}\sin\left[(n+2)\theta\right] \Rightarrow \frac{z^{n+2} - \left(\overline{z}\right)^{n+2}}{z - \overline{z}} = \frac{2i.\rho^{n+2}\sin\left[(n+2)\theta\right]}{2i.\rho\sin\theta} = \rho^{n+1}.\frac{\sin\left[(n+2)\theta\right]}{\sin\theta}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức: $(z - \overline{z})a_{n+1} - r(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}})a_n = (z)^{n+2} - (\overline{z})^{n+2}$

$$\Leftrightarrow (z - \overline{z})a_{n+1} - r(\frac{\overline{z} - z}{z.\overline{z}})a_n = z^{n+2} - (\overline{z})^{n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{r}{\rho^2}a_n = \frac{z^{n+2} - (\overline{z})^{n+2}}{(z - \overline{z})}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{r}{\rho^2}a_n = \rho^{n+1}.\frac{\sin\left[(n+2)\theta\right]}{\sin\theta}$$

Do $\rho > 0$ nên xét n_0 là một giá trị nguyên dương sao cho:

$$\frac{\sin\left[(n_0+2)\theta\right]}{\sin\theta} < 0 \Rightarrow \rho^{n_0+1}.\frac{\sin\left[(n_0+2)\theta\right]}{\sin\theta} < 0 \Rightarrow a_{n_0+1} + \frac{r}{\rho^2}a_{n_0} < 0.$$

Vì $\frac{r}{\rho^2} > 0$ nên a_{n_0+1}, a_{n_0} trái dấu với nhau. Do đó, trong hai giá trị này có một số âm.

Ta thấy khi n tiến tới vô cực, tồn tại vô số giá trị n_0 sao cho $\frac{\sin\left[(n_0+2)\theta\right]}{\sin\theta} < 0$, mà ứng với mỗi giá trị n_0 như thế ta lại tìm được một số hạng âm của dãy đã cho, tức là dãy (a_n) có vô số số âm. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 3.

Cho các số nguyên dương a, b sao cho a, b và $a.b$ đều không là số chính phương. Chứng minh rằng trong hai phương trình sau:

$$ax^2 - by^2 = 1$$

$$ax^2 - by^2 = -1$$

có ít nhất một phương trình không có nghiệm nguyên dương.

* Trước hết ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Cho A, B là các số nguyên dương và A, B, AB đều không là các số chính phương. Khi đó: nếu gọi (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell $x^2 - ABy^2 = 1$ (do AB không là số chính phương nên phương trình Pell này luôn có nghiệm nguyên dương, nghĩa là (a, b) tồn tại) và (x_0, y_0) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $Ax^2 - By^2 = 1$ thì ta luôn có hệ thức liên hệ sau: $\begin{cases} a = Ax_0^2 + By_0^2 \\ b = 2x_0y_0 \end{cases}$

*Chứng minh:

Do (x_0,y_0) là nghiệm của $Ax^2 - By^2 = 1$ nên $Ax_0^2 - By_0^2 = 1$.

Đặt $u = Ax_0^2 + By_0^2, v = 2x_0y_0$; khi đó, ta có:

$u^2 - ABv^2 = \left(Ax_0^2 + By_0^2\right)^2 - AB.\left(2x_0y_0\right)^2 = \left(Ax_0^2 - By_0^2\right)^2 = 1$.

Do đó, (u; v) là một nghiệm của $x^2 - ABy^2 = 1$.

Mà (a, b) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình Pell $x^2 - ABy^2 = 1$ nên $u \ge a, v \ge b$.

Ta sẽ chứng minh rằng u = a, v = b.

Thật vậy, giả sử ngược lại, u > a, v > b. Ta có:

$a - b\sqrt{AB} < \left(a - b\sqrt{AB}\right)\left(a + b\sqrt{AB}\right) = a^2 - ABb^2 = 1$

$\Rightarrow \left(a - b\sqrt{AB}\right)\left(\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0\right) < \sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0$

$\Leftrightarrow \left(ax_0 - Bby_0\right)\sqrt{A} + (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} < \sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0$

Mặt khác: $a + b\sqrt{AB} < u + v\sqrt{AB} = Ax_0^2 + By_0^2 + 2x_0y_0\sqrt{AB} = \left(\sqrt{A}x_0 + \sqrt{B}y_0\right)^2$

Do đó:

$\left(ax_0 - Bby_0\right)\sqrt{A} - (ay_0 - Abx_0)\sqrt{B} = \left(a + b\sqrt{AB}\right)\left(x_0\sqrt{A} - y_0\sqrt{B}\right) <$

$\left(x_0\sqrt{A} - y_0\sqrt{B}\right)\left(x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B}\right)^2 = \left(Ax_0^2 - By_0^2\right)\left(x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B}\right) = \left(x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B}\right)$

Đặt $s = ax_0 - Bby_0, t = ay_0 - Abx_0$, ta được: $\begin{cases} s\sqrt{A} + t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} & (1) \\ s\sqrt{A} - t\sqrt{B} < x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B} & (2) \end{cases}$

Hơn nữa: $As^2 - Bt^2 = A\left(ax_0 - Bby_0\right)^2 - B\left(ay_0 - Abx_0\right)^2 = \left(a^2 - ABb^2\right)\left(Ax_0^2 - By_0^2\right) = 1.1 = 1$

Ta thấy s > 0 vì: $s > 0 \Leftrightarrow ax_0 - Bby_0 > 0 \Leftrightarrow ax_0 > Bby_0 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > B^2b^2y_0^2 \Leftrightarrow a^2x_0^2 > Bb^2(Ax_0^2 - 1)$

$\Leftrightarrow (a^2 - ABb^2)x_0^2 > -Bb^2 \Leftrightarrow x_0^2 > -Bb^2$, đúng do B > 0.

Ta cũng thấy $t \neq 0$ bởi vì nếu t = 0 thì:

$ay_0 - Abx_0 = 0 \Leftrightarrow ay_0 = Abx_0 \Leftrightarrow a^2y_0^2 = A^2b^2x_0^2 \Leftrightarrow y_0^2(ABb^2 + 1) = Ab^2(By_0^2 + 1) \Leftrightarrow y_0^2 = Ab^2$

Điều này mâu thuẫn do A không là số chính phương.

-Nếu t > 0 thì (s; t) là một nghiệm dương của phương trình $Ax^2 - By^2 = 1$, từ đó:

$s \geq a, t \geq b$, suy ra: $s\sqrt{A} + t\sqrt{B} > x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B}$, điều này mâu thuẫn với (1).

-Tương tự, nếu t < 0 thì (s; -t) là một nghiệm dương của phương trình $Ax^2 - By^2 = 1$, từ đó:

$s \geq a, -t \geq b$, suy ra: $s\sqrt{A} - t\sqrt{B} > x_0\sqrt{A} + y_0\sqrt{B}$, điều này mâu thuẫn với (2).

Do đó, điều giả sử là sai, nghĩa là u = a, v = b. Bổ đề được chứng minh.

*** Trở lại bài toán:**

Giả sử ngược lại, cả hai phương trình:

$$ax^2 - by^2 = 1 \qquad (*)$$
$$ax^2 - by^2 = -1 \qquad (**)$$

đều có nghiệm nguyên dương. Gọi (m, n) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình $x^2 - aby^2 = 1$; (x_1; y_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (*); (x_2; y_2) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của (**). Theo bổ đề trên, ta có các hệ thức sau:

$$\begin{cases} m = ax_1^2 + by_1^2 \\ n = 2x_1y_1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} m = bx_2^2 + ay_2^2 \\ n = 2x_2y_2 \end{cases}$$

Từ (*)$\Rightarrow ax_1^2 = by_1^2 + 1$, từ (**)$\Rightarrow ay_2^2 = bx_2^2 - 1$, so sánh các đẳng thức ở trên, ta cũng có:

$ax_1^2 + by_1^2 = bx_2^2 + ay_2^2 \Rightarrow 2by_1^2 + 1 = 2bx_2^2 - 1 \Leftrightarrow b\left(y_1^2 - x_2^2\right) = 1$.

Nhưng do b là số nguyên dương, không phải là số chính phương nên b > 1, nghĩa là đẳng thức trên không thể xảy ra. Suy ra điều giả sử ở trên là sai.

Vậy trong hai phương trình (*) và (**) đã cho có ít nhất một phương trình không có nghiệm nguyên dương. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 4.

Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số a,b,c dương:

$$\left(r+\frac{a}{b+c}\right)\left(r+\frac{b}{c+a}\right)\left(r+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

Ta sẽ xét điều kiện cần và đủ để tìm các giá trị r thỏa đề bài.

* **Điều kiện cần:** Xét trường hợp $a=b>0$. Đặt $t=\frac{c}{a}>0$. Ta có:

$$\left(r+\frac{a}{b+c}\right)\left(r+\frac{b}{c+a}\right)\left(r+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(r+\frac{a}{a+c}\right)^2.\left(r+\frac{c}{2a}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow\left(r+\frac{1}{1+\frac{c}{a}}\right)^2.\left(r+\frac{c}{2a}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(r+\frac{1}{1+t}\right)^2.\left(r+\frac{t}{2}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow\left[r^2+\frac{2r}{t+1}+\left(\frac{1}{t+1}\right)^2\right].\left(r+\frac{t}{2}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{t+1}+\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\right).r^2+\left(\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{2t}{t+1}-\frac{3}{4}\right).r+\left(\frac{t}{t+1}-\frac{1}{8}\right)\geq 0$$

Cho $t\to 0$, từ bất đẳng thức trên, suy ra: $4r^2+2r-1\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} r\geq\frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ r\leq\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\end{array}\right.$ (*)

* **Điều kiện đủ:**

Ta sẽ chứng minh rằng với giá trị r thỏa mãn (*) thì bất đẳng thức đã cho đúng với mọi số dương a, b, c. Thật vậy: Đặt: $x=\frac{a}{b+c},y=\frac{b}{c+a},z=\frac{c}{a+b}$, $x,y,z>0$. Ta có:

$$xy+yz+zx+2xyz=\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}+\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}=$$

$$\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1$$

Ta sẽ chứng minh các bất đẳng thức sau:

(1) $x+y+z\geq 2(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 2\left[\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)(c+a)}+\frac{ca}{(c+b)(a+b)}\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc \geq 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$\Leftrightarrow a(a^2+bc-ab-ac)+b(b^2+ca-ba-bc)+c(c^2+ab-ca-cb) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0$

Bất đẳng thức này chính là bất đẳng thức Schur với các số dương a, b, c.

(2) $\qquad xy+yz+zx \geq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)(c+a)}+\frac{ca}{(c+b)(a+b)} \geq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 4\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right] \geq 3\left[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right]+6abc$

$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc$

$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng nên (2) đúng với mọi số dương a, b, c.

Đặt $t=xy+yz+zx \Rightarrow t \geq \frac{3}{4}$. Bất đẳng thức đã cho chính là:

$(r+x)(r+y)(r+z) \geq (r+\frac{1}{2})^3$

$\Leftrightarrow r^3+(x+y+z)r^2+(xy+yz+zx)r+xyz \geq r^3+\frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4}r+\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow (x+y+z-\frac{3}{2})r^2+(xy+yz+zx-\frac{3}{4})r+xyz-\frac{1}{8} \geq 0$

Do $x+y+z \geq 2(xy+yz+zx)$ và $xy+yz+zx+2xyz=1 \Leftrightarrow xyz=\frac{1}{2}(1-xy-yz-zx)$ nên để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$\Leftrightarrow \left[2(xy+yz+zx)-\frac{3}{2}\right]r^2+(xy+yz+zx-\frac{3}{4})r+\frac{1}{2}(1-xy-yz-zx)-\frac{1}{8} \geq 0$

$\Leftrightarrow (2t-\frac{3}{2})r^2+(t-\frac{3}{4})r+\frac{1}{2}(1-t)-\frac{1}{8} \geq 0$

$\Leftrightarrow t(2r^2+r-\frac{1}{2}) \geq \frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4}r-\frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow t.\frac{4r^2+2r-1}{2} \geq \frac{3(4r^2+2r-1)}{8} \Leftrightarrow (4r^2+2r-1)\left(t-\frac{3}{4}\right) \geq 0$

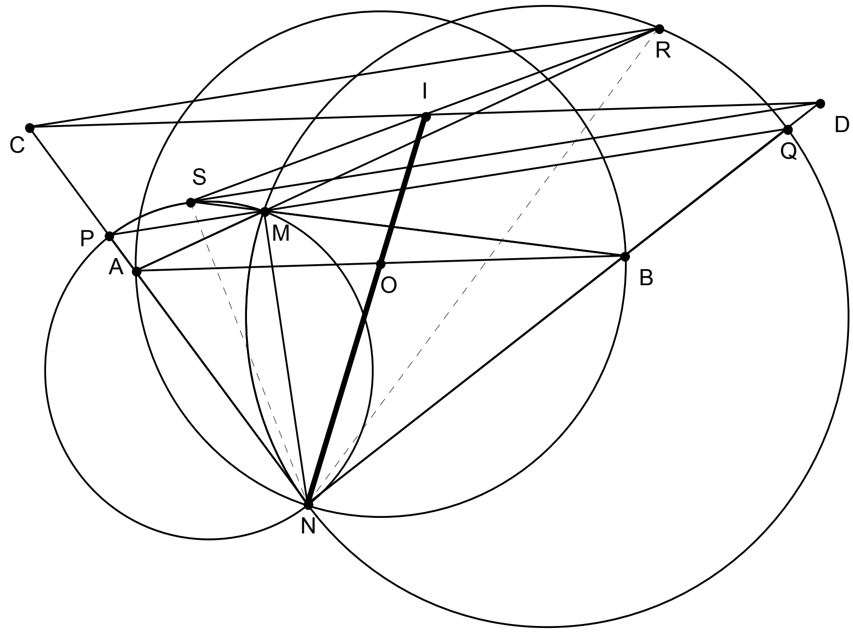
Bất đẳng thức cuối đúng do (*) và (2) nên bất đẳng thức đã cho là đúng.

Vậy điều kiện của r cần tìm là $r \geq \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ hoặc $r \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

Bài 5.

Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm bất kì nằm trong (O), M không nằm trên AB. Gọi N là giao điểm của phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M.

Chứng minh rằng: đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.



* Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NA tại C, qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NB tại D. Gọi I là trung điểm của CD .

Ta sẽ chứng minh rằng CD // AB.

Thật vậy, do N nằm trên đường tròn đường kính AB nên: $\widehat{ANB} = 90^0 \Rightarrow AN \perp BN$, suy ra BN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PN.

Do đó: $\Delta BMN \sim \Delta BNS(g.g)$

Vì PQ là đường phân giác góc ngoài của AMN nên: $\widehat{SMP} = \widehat{AMP} = \widehat{QMR} = \widehat{BMQ}$.

Mặt khác: $\widehat{SMP} = \widehat{SNP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung PS của đường tròn đường kính PN),

$\widehat{QMR} = \widehat{QNR}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QR của đường tròn đường kính QN).

Do đó: $\widehat{SNP} = \widehat{QNR} \Rightarrow \widehat{SNP} + \widehat{SNR} = \widehat{QNR} + \widehat{SNR} \Rightarrow \widehat{CNR} = \widehat{SNB}$.

Xét hai tam giác Δ BNS và Δ RNC có: $\widehat{CNR} = \widehat{SNB}$ và $\widehat{RCN} = \widehat{MPN} = \widehat{NSM} = \widehat{NSB}$ nên: $\Delta BNS \sim \Delta RNC(g.g)$.

Suy ra các tam giác đồng dạng: $\Delta BMN \sim \Delta BNS \sim \Delta RNC$.

Tương tự, ta cũng có: $\Delta DSN \sim \Delta RAN \sim \Delta NAM$.

* Ta thấy, từ: $\Delta BNS \sim \Delta RNC \Rightarrow \frac{NB}{NR} = \frac{NS}{NC} \Rightarrow NB.NC = NR.NS$

$$\Delta DSN \sim \Delta RAN \Rightarrow \frac{NS}{NA} = \frac{ND}{NR} \Rightarrow NA.ND = NR.NS .$$

Suy ra: $NA.ND = NB.NC \Rightarrow \frac{NA}{NB} = \frac{NC}{ND} \Rightarrow$ AB // CD

$\Rightarrow$ Trung điểm của AB, trung điểm của CD và N là ba điểm thẳng hàng.
Tức là N, O, I thẳng hàng. (1)

* Hơn nữa: $\Delta BMN \sim \Delta RNC \Rightarrow \frac{MN}{NC} = \frac{BN}{RC} \Rightarrow RC = \frac{NB.NC}{MN}$.

$$\Delta DSN \sim \Delta NAM \Rightarrow \frac{DN}{MN} = \frac{DS}{NA} \Rightarrow DS = \frac{NA.ND}{MN}.$$

Kết hợp các điều trên, ta được: RC = DS, mà RC // DS (cùng song song với PQ) nên tứ giác RCSD là hình bình hành.

Do đó, hai đường chéo CD và RS của tứ giác cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Suy ra I là trung điểm của CD cũng là trung điểm của RS.
Khi đó: NI chính là đường trung tuyến của tam giác NRS. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: trung tuyến NI của tam giác NRS luôn đi qua O.
Vậy trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua I là điểm cố định khi M di động khắp phía trong đường tròn (O).
Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 6.

Một hội nghị toán học có tất cả $6n + 4$ nhà toán học phải họp với nhau đúng $2n + 1$ lần $(n \geq 1)$. Mỗi lần họp, họ ngồi quanh một cái bàn 4 chỗ và n cái bàn 6 chỗ, các vị trí ngồi chia đều khắp mỗi cái bàn. Biết rằng hai nhà toán học đã ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp này thì sẽ không được ngồi cạnh hoặc đối diện nhau ở một cuộc họp khác.

a/ Chứng minh rằng Ban tổ chức có thể xếp được chỗ ngồi nếu $n = 1$.

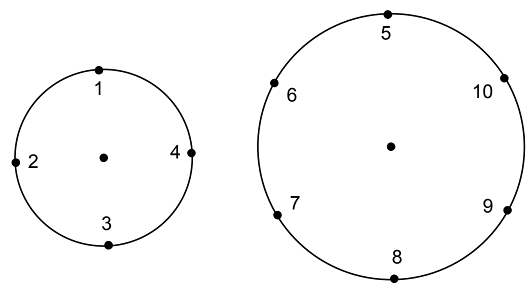
b/ Hỏi rằng Ban tổ chức có thể sắp xếp được chỗ ngồi được hay không với mọi $n > 1$?

a. Với $n = 1$, ta có bài toán như sau: một hội nghị toán học có 10 nhà toán học, họ phải họp với nhau đúng 3 lần và trong mỗi lần họp như thế, họ phải ngồi quanh một cái bàn 4 chỗ và một cái bàn 6 chỗ, các vị trí ngồi chia đều khắp bàn; đồng thời, hai người đã ngồi kề nhau hoặc đối diện nhau trong cuộc họp này thì không được ngồi kề nhau hoặc đối diện nhau trong một cuộc họp khác.

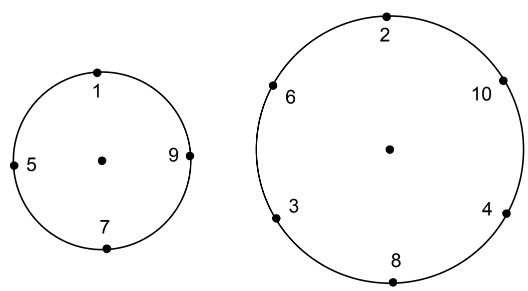
Đánh số thứ tự cho 10 nhà toán học đang xét là (1), (2), (3), …(10).

Ta sẽ chỉ ra một cách sắp xếp thỏa mãn đề bài trong trường hợp này. Ta có các sơ đồ sau:

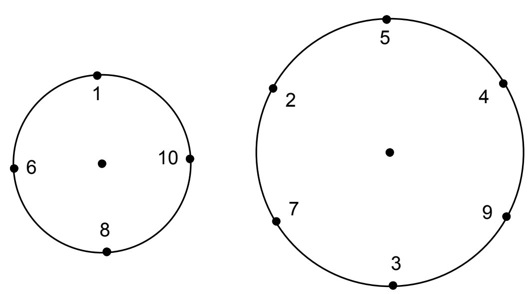
-Buổi họp thứ 1:



-Buổi họp thứ 2:



-Buổi họp thứ 3:



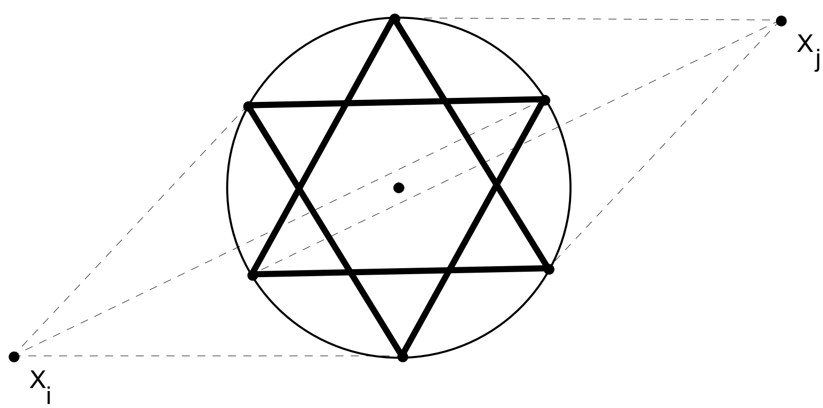
b. Ta sẽ chứng minh rằng trong trường hợp tổng quát, Ban tổ chức luôn có thể xếp chỗ ngồi cho các nhà toán học trong các cuộc họp.

Ta chia $6n + 4$ nhà toán học thành $2n + 2$ "nhóm". Một "nhóm" chỉ gồm 1 người luôn ngồi ở một vị trí cố định tại bàn 4 chỗ, đặt người này là X_0; $2n + 1$ "nhóm" còn lại chia ra từ $6n + 3$ nhà toán học, mỗi "nhóm" có 3 nhà toán học.

Đặt các "nhóm" đó là $X_1, X_2, X_3, ..., X_{2n+1}$. Các "nhóm" này sẽ lần lượt ngồi vào các vị trí còn lại của bàn 4 chỗ cùng với X_0, mỗi "nhóm" ngồi đúng một lần.

* <u>Với các bàn 6 chỗ, ta có cách sắp xếp như sau:</u>

Ở bước thứ k, $1 \le k \le 2n+1$, với hai "nhóm" bất kì X_i, X_j trong đó: $i + j \equiv k \pmod{2n+1}$, $1 \le i, j \le 2n+1$, $i \ne j$ thì các nhà toán học thuộc hai "nhóm" X_i, X_j sẽ ngồi vào họp cùng nhau ở một bàn 6 chỗ nào đó; đồng thời, những nhà toán học thuộc cùng một "nhóm" thì ngồi ở các vị trí tạo thành một tam giác đều trên các bàn 6 chỗ, nghĩa là họ sẽ không rơi vào trường hợp ngồi đối diện nhau hoặc ngồi cạnh nhau.



* <u>Với bàn 4 chỗ, ta có cách sắp xếp như sau:</u>

- Nếu k là số chẵn thì ở bước này, chỉ có một "nhóm" có chỉ số $\frac{k}{2}$ là không được ngồi chung bàn 6 chỗ với nhóm nào, như thế "nhóm" này sẽ ngồi vào bàn 4 chỗ cùng với X_0.

- Nếu k là số lẻ, ở bước này; tương tự trên, chỉ có một "nhóm" có chỉ số là $\frac{k+2n+1}{2}$ không được chung bàn 6 chỗ với "nhóm" nào, "nhóm" này sẽ ngồi vào bàn 4 chỗ cùng với X_0.

Dễ dàng thấy rằng cách sắp xếp như thế thỏa mãn mọi yêu cầu của bài toán.

Vậy Ban tổ chức có thể sắp xếp được chỗ ngồi mọi $n > 1$.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

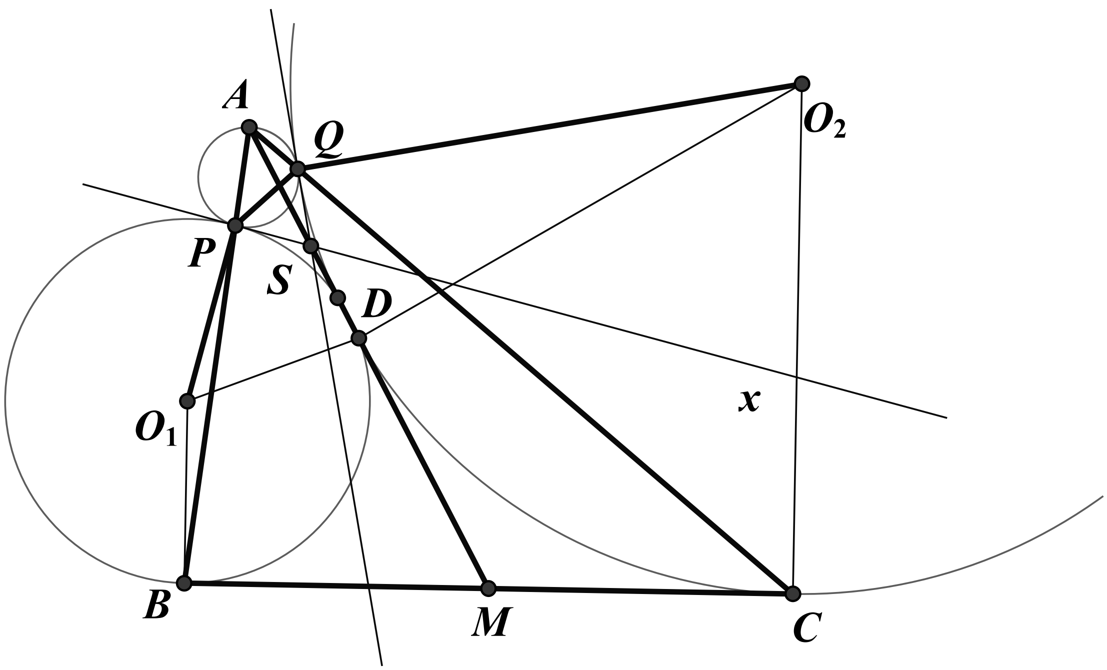
DỰ THI IMO 2010

__Bài 1__.

Cho tam giác ABC không vuông tại A có đường trung tuyến AM. Gọi D là một điểm di động trên đường thẳng AM. Gọi $(O_1),(O_2)$ là các đường tròn đi qua D, tiếp xúc với BC lần lượt tại B và C. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn (O_1), đường thẳng AC với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng:

1. Tiếp tuyến tại P của (O_1) và tiếp tuyến tại Q của (O_2) phải cắt nhau tại một điểm. Gọi giao điểm đó là S.

2. Điểm S luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định khi D di động trên AM.



1. Vì M là trung điểm của BC nên $MA^2 = MB^2$, suy ra M có cùng phương tích đến hai đường tròn (O_1), (O_2) hay M thuộc trục đẳng phương của .

Hơn nữa, hai đường tròn cắt nhau tại D nên D cũng nằm trên trục đẳng phương của chúng.

Từ đó, suy ra DM chính là trục đẳng phương của $(O_1),(O_2)$, mà A thuộc đường thẳng DM nên A có cùng phương tích đến hai đường tròn $(O_1),(O_2)$.

Suy ra: $\overline{AP}.\overline{AB} = \overline{AQ}.\overline{AC}$ hay tứ giác BPQC nội tiếp.

Từ hệ thức trên ta cũng thấy rằng nếu P trùng với A thì Q cũng trùng với A, nếu P thuộc đoạn AB thì Q cũng thuộc đoạn AC và ngược lại.

Không mất tính tổng quát, giả sử góc $\widehat{ABC}$ nhọn, gọi Px là tia tiếp tuyến của đường tròn (O_1) sao cho góc $\widehat{xPB}$ nhọn.

Theo tính chất tiếp tuyến, ta có: $\widehat{xPB} = \widehat{PBC}$, mà $\widehat{PBC} = \widehat{AQP}$ nên $\widehat{xPB} = \widehat{AQB}$.

$\Rightarrow$ Px cũng là tiếp tuyến của đường tròn (APQ).

Do đó: (O_1) tiếp xúc với đường tròn (APQ).

Hoàn toàn tương tự: ta cũng có (O_2) cũng tiếp xúc với đường tròn (APQ).

Suy ra: tiếp tuyến tại P của (O_1) và tiếp tuyến tại Q của (O_2) cũng chính là hai tiếp tuyến của (APQ) tại các điểm P, Q.

Hơn nữa, theo giả thiết: $\widehat{PAQ} \neq 90^0$ nên hai tiếp tuyến đó không song song và do đó chúng phải cắt nhau (đpcm).

2. Theo chứng minh ở trên, ta có: S thuộc tiếp tuyến của (O_1) và (O_2), $SP = SQ$ nên S có cùng phương tích đến hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ nên S thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn này, nghĩa là S nằm trên AM.

Vậy khi D thay đổi trên AM thì S cũng di chuyển trên AM là đường thẳng cố định.

Ta có đpcm.

Bài 2.

Với mỗi số n nguyên dương, xét tập hợp sau :

$$T_n = \left\{11(k+h)+10(n^k+n^h) \mid 1 \le k,h \le 10\right\}.$$

Tìm tất cả giá trị của n sao cho không tồn tại $a,b \in T_n$; $a \ne b$ ***sao cho*** $(a-b)$ ***chia hết cho 110.***

Đặt $f(k,h,n) = 11(k+h)+10(n^k+n^h),\ k,h,n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $f(k,h,n) = f(h,k,n)$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $h \ge k$.

Nếu $m \equiv n \pmod{11}$ thì :

$$f(k,h,m) - f(k,h,n) = \left[11(k+h)+10(m^k+m^h)\right] - \left[11(k+h)+10(n^k+n^h)\right] =$$
$$= 10\left[(m^k-n^k)+(m^h-n^h)\right] \vdots 110 \Rightarrow f(k,h,m) \equiv f(k,h,n) \pmod{110}$$

Từ đó, ta chỉ cần xét các giá trị n thỏa $1 \le n \le 11$.

Xét hiệu: $f(6,6,n) - f(1,1,n) = 110 + 20n.(n^5-1)$. Nếu $20n.(n^5-1)$ chia hết cho 110 thì giá trị n tương ứng sẽ không thỏa. Từ đó, ta loại đi các giá trị $n = 1,3,4,5,9,11$.

Ta cũng có $f(8,2,n) - f(6,4,n) = 10(n^8+n^2-n^6-n^4) = 10n^2(n^2-1)^2(n^2+1)$, với $n = 10$ thì $10n^2(n^2-1)^2(n^2+1) \vdots 110$ nên giá trị này cũng không thỏa.

Ta sẽ chứng minh rằng các giá trị $n = 2,6,7,8$ thỏa mãn. Thật vậy:

Tính toán trực tiếp, ta thấy rằng với $n = 2,6,7,8$ thì $n^k \ne n^h \pmod{11}$ với $k \ne h \pmod{11}$.

Giả sử ngược lại, với các giá trị n nêu trên, tồn tại hai bộ $(k,h) \ne (k',h')$ (giả sử $k > k'$) sao cho: $f(k,h,n) \ne f(k',h',n)$. Khi đó: $11(k+h-k'-h') + 10(n^k+n^h-n^{k'}-n^{h'}) \equiv 0 \pmod{110}$.

Suy ra:
$k-k' \equiv h-h' \pmod{10},\ n^k+n^h \equiv n^{k'}+n^{h'} \pmod{11} \Leftrightarrow n^{k'}(n^{k-k'}-1) \equiv n^h(n^{h'-h}-1) \pmod{11}$.

Do 11 là số nguyên tố nên theo định lí Fermat nhỏ thì: $n^{k-k'} \equiv n^{h'-h} \pmod{11}$.

Dễ thấy: $n^{k-k'}-1 \equiv n^{h'-h}-1 \ne 0 \pmod{11}$ nên từ đẳng thức trên, suy ra: $n^{k'} \equiv n^h \pmod{11} \Rightarrow k' = h$.

Do đó: $k = h'$ hay $(k,h) \equiv (k',h')$, mâu thuẫn.

Suy ra các giá trị $n = 2,6,7,8$ đều thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là: $n \equiv 2,6,7,8 \pmod{11}$.

Bài 3.

Gọi một hình chữ nhật có kích thước 1×2 ***là hình chữ nhật đơn và một hình chữ nhật có kích thước*** 2×3***, bỏ đi 2 ô ở góc chéo nhau (tức có có 4 ô vuông con) là hình chữ nhật kép. Người ta ghép khít các hình chữ nhật đơn và hình chữ nhật kép này lại với nhau được một bảng hình chữ nhật có kích thước là*** 2008×2010.

Tìm số nhỏ nhất các hình chữ nhật đơn có thể dùng để ghép.

Ta sẽ chứng minh rằng số hình chữ nhật đơn nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là 1006. Thật vậy:

***Điều kiện cần:**

Ta xét một cách phủ hình chữ nhật 2008×2010 thỏa mãn đề bài (chú ý rằng 2008 chỉ số hàng và 2010 chỉ số cột). Gọi x, y, z, t là số các hình chữ nhật $1\times 2,\ 2\times 1,\ 2\times 3,\ 3\times 2$ trong cách phủ đó (ở đây thực ra các hình chữ nhật $1\times 2,\ 2\times 1$ đều là các hình chữ nhật đơn của đề bài, chỉ phân biệt ở cách phủ dọc hay ngang, trong đó 1×2 được đặt ngang, 2×1 được đặt dọc; tương tự với cách phân biệt $2\times 3,\ 3\times 2$).

Tô màu trắng cho các hàng lẻ, tô màu đen cho các hàng chẵn. Ở tất cả các ô của hàng thứ $i, 1\le i\le 2010$, ta đánh số tương ứng các số tự nhiên i.

Ta sẽ chứng minh các nhận xét sau:

- Nhận xét 1: ta luôn có đẳng thức: $2(x+y)+4(z+t)=2008.2010$.

Mỗi hình chữ nhật 1×2 hoặc 2×1 có chứa hai ô vuông, mỗi hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 có chứa bốn ô vuông. Tổng các ô vuông này bằng số ô vuông của cả hình chữ nhật lớn nên $2(x+y)+4(z+t)=2008.2010$.

- Nhận xét 2: Giá trị x, y là chẵn.

Ta thấy trên toàn bảng, các hình chữ nhật $2\times 3,\ 3\times 2$ đều có số ô trắng bằng số ô đen; các hình chữ nhật 2×1 được đặt dọc nên cũng có số ô trắng bằng số ô đen. Suy ra, số hình chữ nhật 1×2 ở các hàng được tô màu trắng bằng số hình chữ nhật ở các hàng được tô đen. Hơn nữa, tổng số các hàng là 2010 là chẵn nên giá trị x phải là chẵn. Từ nhận xét 1, ta thấy y cũng phải chẵn.

Trở lại bài toán, ta xét tương ứng Φ đi từ tập hợp các hình chữ nhật đang xét đến các số nguyên là hiệu giữa tổng các số ở ô vuông được tô đen với tổng các số ở ô vuông được tô trắng ghi trên nó.

Dễ dàng thấy rằng: $\Phi(3\times 2)=0;\ \Phi(2\times 3)=\pm 2;\ \Phi(2\times 1)=\pm 1$.

Từ đó suy ra: $\sum\Phi(3\times 2)=0;\ \sum\Phi(2\times 3)\le 2z;\ \sum\Phi(2\times 1)\le y$.

(kí hiệu $\sum\Phi(3\times 2)$ là tổng tính trên tất cả các hình chữ nhật 3×2 được dùng, định nghĩa tương tự với các hình chữ nhật khác).

Ta cũng thấy rằng, tổng các số ghi trên x hình chữ nhật 1×2 là một số chẵn thuộc $[2;\ 2.2008]$, mà x là số chẵn (nhận xét 2), ta có đánh giá sau: $\sum\Phi(1\times 2)\le\frac{x}{2}(2.2008-2)$.

Ta có: $\Phi(2008\times 2010)=\sum_{i=1}^{1004}2010.\left[2i-(2i-1)\right]=\sum_{i=1}^{1004}2010.i=2010.1004$.

Mặt khác: $\Phi(2008\times 2010)=\sum\Phi(2\times 1)+\sum\Phi(1\times 2)+\sum\Phi(3\times 2)+\sum\Phi(2\times 3)$.

Từ các điều trên, suy ra: $2010.1004\le\frac{x}{2}.(2.2008-2)+y+2z\Leftrightarrow 2010.1004\le 2007x+y+2z$.

Tiếp theo, ta xét hình chữ nhật 2010×2008 (tương tự như trên nhưng có 2010 hàng và 2008 cột), bắt đầu lại các lập luận về số các hình chữ nhật 1×2, 2×1, 2×3, 3×2 được dùng.

Ta xây dựng được bất đẳng thức sau: $2008.1005\le 2009y+x+2t$.

Cộng hai bất đẳng thức này lại, ta có:

$2008.1005+2010.1004\le(2009y+x+2t)+(2007x+y+2z)=2008x+2010y+2(z+t)$.

Hơn nữa, theo nhận xét 1 thì: $2010.1004=(x+y)+2(z+t)$.

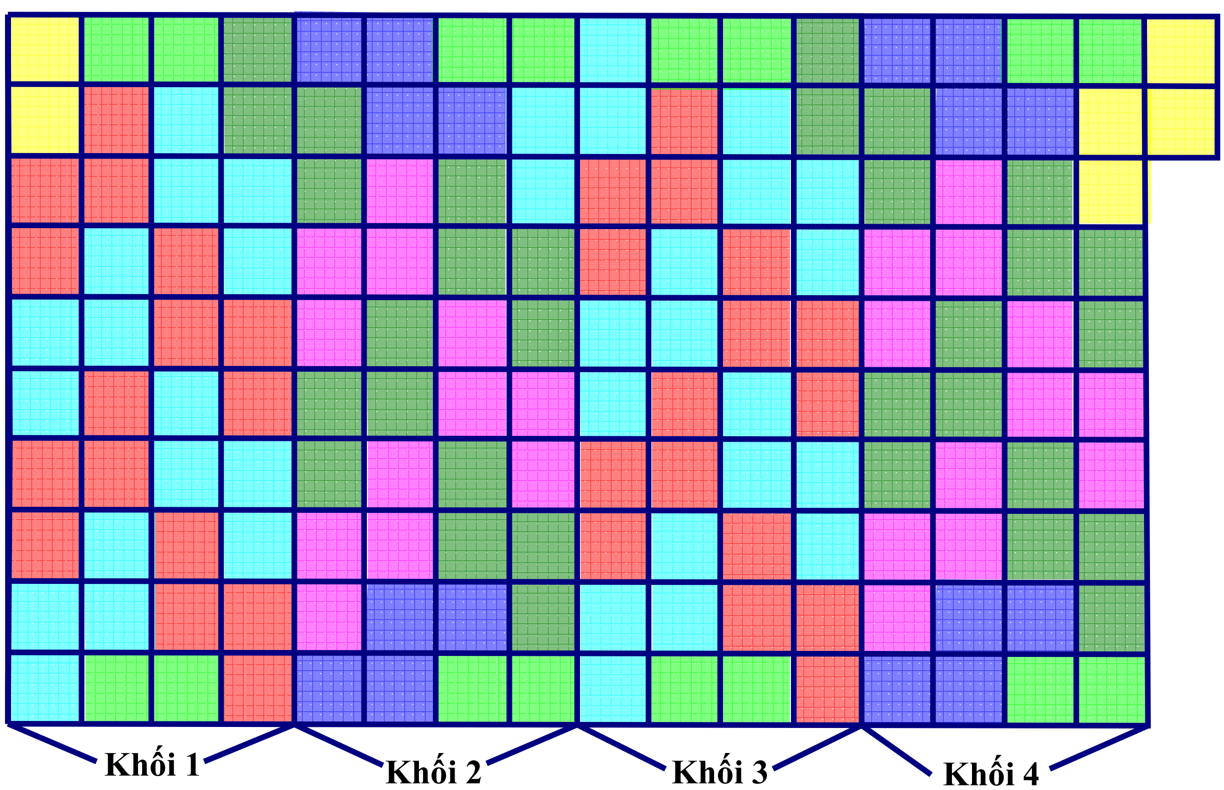
Từ đó ta được: $2008.1005\le 2007x+2009y\le 2009(x+y)$.

Suy ra: $x+y\ge 1005.\frac{2008}{2009}>1004$, mà $x+y$ là số chẵn nên $x+y\ge 1006$.

Do đó, tổng các hình chữ nhật đơn cần dùng ít nhất là 1006. Điều kiện cần được chứng minh.

***Điều kiện đủ:**

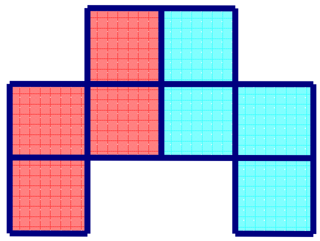
Ta sẽ chỉ ra một cách ghép hình chữ nhật dùng đúng 1006 hình chữ nhật đơn.



Hình trên mô tả cách ghép một hình chữ nhật 10×16, trong đó: các hình chữ nhật khuyết được tô bằng 5 màu khác nhau (đỏ, hồng, xanh lam, xanh lá cây, xanh đậm) để dễ dàng phân biệt; trên hình các khối được tô màu xanh lá mạ là các hình chữ nhật đơn chắc chắn phải dùng, các khối màu vàng thì tùy trường hợp, có thể là hình chữ nhật đơn mà cũng có thể là hình chữ nhật khuyết.

* Hình chữ nhật 2010×2008 có thể được tạo thành từ hình trên bằng quy tắc sau:

- Thêm các dòng bằng cách chèn vào giữa mỗi khối ở trên các hình có dạng:



Mỗi lần ghép như thế thì ta có thêm được hai hàng mới, do 2010 chia hết cho 2 nên khi thực hiện việc này liên tiếp một cách thích hợp thì khối này sẽ tăng về chiều dài, tạo thành các khối mới có kích thước 2010×4 và ở mỗi khối như vậy, ta chỉ dùng đúng 2 hình chữ nhật màu xanh lá mạ.

- Thêm cột bằng cách lặp lại các khối 1, 2 , 3, 4 ở trên hình (chú ý tính tuần hoàn giữa các khối: (1) tương ứng với (3), (2) tương ứng với (4)).

Như thế thì ta cần phải có tất cả 502 khối dành cho 2008 cột. Đồng thời, ở khối đầu tiên và khối cuối cùng, ta cần dùng thêm một hình chữ nhật đơn màu vàng, các khối ở giữa thì dùng các hình chữ nhật khuyết màu vàng. Tức là: ở hai khối đầu tiên và cuối cùng, ta cần dùng 3 hình chữ nhật đơn, các khối ở giữa chỉ cần dùng 2 hình chữ nhật đơn thôi.
Khi đó, tổng số hình chữ nhật đơn cần dùng là: $500.2+2.3=1006$.
Xoay hình chữ nhật 2010×2008 lại, ta được hình chữ nhật 2008×2010 cần phải ghép, hình chữ nhật đó có đúng 1006 hình chữ nhật đơn thỏa mãn đề bài.
Do đó, điều kiện đủ được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất các hình chữ nhật đơn cần dùng là 1006.
Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 4.

Cho a,b,c ***là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:*** $16(a+b+c)\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2(b+a)})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2(c+b)})^3}\le \frac{8}{9}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a+b+\sqrt{2(a+c)}=(a+b)+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\ge 3\sqrt[3]{(a+b).\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)^2}=3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}\le \frac{2}{27(a+b)(a+c)}.$$

Tương tự với hai biểu thức còn lại. Do đó:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}\le \sum_{sym}\frac{2}{27(a+b)(a+c)}=\frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Hơn nữa, ta thấy với mọi a, b, c dương:

$$9(a+b)(b+c)(c+a)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)=\sum_{sym}a(b-c)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Do đó: $\sum_{cyc}\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}\le \frac{1}{6(ab+bc+ca)}$. (1).

Mặt khác, ta cũng có: $(ab+ca+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$ nên theo giả thiết:

$$16(a+b+c)\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}\ge \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\Rightarrow ab+bc+ca\ge \frac{3}{16}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2(b+a)})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2(c+b)})^3}\le \frac{8}{9}$.

Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức trên xảy ra hay:

$$\begin{cases} a,b,c>0 \\ a=b=c \\ 16(a+b+c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\frac{1}{4}.$$

<u>Bài 5</u>.

Trong một hội nghị có n nước tham gia, mỗi nước có k đại diện ($n > k > 1$***). Người ta chia n.k người này thành n nhóm, mỗi nhóm có k người sao cho không có hai người nào cùng nhóm đến từ cùng một nước.***
Chứng minh rằng có thể chọn ra một nhóm gồm n người sao cho họ thuộc các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Ta gọi một nước X và một nhóm Y nào đó có liên hệ với nhau nếu trong nhóm Y có người của nước X. Khi đó, một nước X bất kì có k người đại diện nên có liên hệ với k nước và một nhóm Y bất kì có chứa k người đại diện khác nhau của các nước khác nhau nên có liên hệ với đúng k nước. Do đó, một tập hợp bất kì m nước nào đó trong n nước đã cho sẽ có liên hệ với ít nhất $\frac{m.k}{k} = m$ nhóm khác nhau.

Gọi $a_i, i = \overline{1,n}$ là n nhóm đã cho và $X_i, \overline{1,n}$ là tập hợp các nhóm có liên hệ với nước thứ i.
Theo điều vừa chứng minh ở trên, ta thấy với mọi:
$i_1, i_2, i_3, ..., i_k \in \{1,2,3,...,n\}$, $1 \le k \le n$ thì: $\left|\bigcup_{j=1}^{k} X_{i_j}\right| \ge k$. (*)
Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n$ và $a_i \ne a_j, i \ne j$.

Thật vậy, ta bắt đầu bỏ đi phần tử thuộc mỗi tập X_i sao cho (*) vẫn được thỏa mãn. Cuối cùng thu được các tập hợp mới $X'_1, X'_2, X'_3, ..., X'_n$ (với $X'_i \subset X_i$) vẫn thỏa điều kiện (*) có số phần tử nhỏ nhất mà nếu bỏ đi thêm bất cứ phần tử thuộc tập hợp $X'_i, \overline{1,n}$ thì điều kiện (*) sẽ không còn được thỏa.
Ta chứng minh rằng $|X'_i| = 1, i = \overline{1,n}$.
Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử X'_1 có chứa phần tử khác nhau là α, β . Do nếu bỏ thêm một trong hai phần tử α hoặc β thì điều kiện (*) không còn thỏa mãn nên sẽ có hai tập chỉ số P, Q sao cho:
Với $M = (X'_1 \backslash \{\alpha\}) \cup \bigcup_{i \in P} X'_i$, $N = (X'_1 \backslash \{\beta\}) \cup \bigcup_{i \in Q} X'_i$ không thỏa mãn điều kiện (*), tức là:
$|M| < |P| + 1,\ |N| < |Q| + 1 \Rightarrow |M| \le |P|, |N| \le |Q|$.

Ta có:

$$M \cup N = ((X'_1 \backslash \{\alpha\}) \cup (X'_1 \backslash \{\beta\})) \cup (\bigcup_{i \in P} X'_i \cup \bigcup_{i \in Q} X'_i) = X'_1 \cup \bigcup_{i \in P \cup Q} X'_i$$

$$\bigcup_{i \in P \cap Q} X'_i \subseteq M \cap N$$

Từ hai điều này suy ra: $|M \cup N| \geq |P \cup Q| + 1$, $|M \cap N| \geq |P \cap Q|$

Theo nguyên lí bù trừ, ta có:

$$|P| + |Q| \geq |M| + |N| = |M \cup N| + |M \cap N| \geq |P \cap Q| + |P \cup Q| + 1 = |P| + |Q| + 1$$

Điều vô lí này dẫn đến khẳng định $|X'_i| = 1, i = \overline{1,n}$.

Rõ ràng các tập hợp này không giao nhau vì nếu tồn tại
$i \neq j, (X'_i \cap X'_j) \neq \varnothing \Rightarrow |X'_i \cap X'_j| = 1 < 2$, mâu thuẫn với điều kiện (*).

Giả sử mỗi phần tử của X'_i chính là a'_i thì tập hợp sau: $(a'_1, a'_2, a'_3, ..., a'_n)$ thỏa mãn $a'_i \in X'_i \subset X_i$ và $a_i \neq a_j, i \neq j$.

Vậy ta đã chỉ ra rằng tồn tại n nhóm khác nhau tương ứng liên hệ với n nước khác nhau, mỗi nhóm đó liên hệ với đúng một nước và mỗi nước liên hệ đúng một nhóm nên n người đại diện mà mỗi nước liên hệ với mỗi nhóm tương ứng rõ ràng thỏa mãn đề bài.
Ta có đpcm.

Bài 6.

Gọi S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của nhị thức $(1+x)^n$, trong đó n là số nguyên dương; x là số thực bất kì.
Chứng minh rằng: $S_{2n}+1$ không chia hết cho 3 với mọi n.

Ta sẽ chứng minh bổ đề sau (định lí Lucas):

"Cho m, n là hai số tự nhiên và p là một số nguyên tố. Giả sử:

$$m = m_k.p^k + m_{k-1}.p^{k-1} + ... + m_2.p^2 + m_1 p + m_0$$

$$n = n_k.p^k + n_{k-1}.p^{k-1} + ... + n_2 p^2 + n_1.p + n_0$$

Khi đó: $C_n^m \equiv \prod_{i=0}^{k} C_{n_i}^{m_i} \pmod p$ *(quy ước rằng* $C_b^a = 0,\ a > b$*).*

*Chứng minh:

Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$ (nếu $m = n$ thì bổ đề hiển nhiên đúng).

Trước hết, ta thấy rằng: $(p,i)=1,\ i=\overline{1,p-1}$ nên $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = p.\dfrac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \vdots\, p$, tức là:

$C_p^k \equiv 0 \pmod p,\ k = \overline{1,p-1}$.

Ta có: $(x+1)^p = x^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i.x^{p-i} \equiv x^p + 1 \pmod p$. (*)

Ta sẽ chứng minh nhận xét: $(x+1)^{p^j} \equiv x^{p^j} + 1 \pmod p, \forall j \in \mathbb{N}^*$ bằng quy nạp. Thật vậy:

- Với $j=1$, nhận xét đúng theo (*).

- Giả sử nhận xét này đúng với $j = h \geq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $j = h+1$.

Ta có: $(x+1)^{p^h} \equiv x^{p^h} + 1 \pmod p$.

Suy ra: $\left((x+1)^{p^h}\right)^h \equiv \left(x^{p^h}\right)^h + 1 \pmod p \Rightarrow (x+1)^{p^{h+1}} \equiv x^{p^{h+1}} + 1 \pmod p$.

Do đó nhận xét đúng với $j = h+1$. Theo nguyên lí quy nạp, nhận xét được chứng minh.

Ta xét khai triển sau:

$(1+x)^m=(1+x)^{\sum\limits_{i=0}^{k} m_i.p^i}\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}(1+x^{p^i})^{m_i}\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{m_i}C_{m_i}^{j}x^{j.p^i}\pmod p$.

Hệ số của x^n ở vế $(1+x)^m$ là C_m^n; do biểu diễn $n=n_k.p^k+n_{k-1}.p^{k-1}+...+n_2p^2+n_1.p+n_0$ là duy nhất nên hệ số của x^n ở vế $\prod\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{m_i}C_{m_i}^{j}x^{j.p^i}$ là $\prod\limits_{i=0}^{k}C_{n_i}^{m_i}$.

Từ đó ta được: $C_n^m\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}C_{n_i}^{m_i}\pmod p$. Bổ đề được chứng minh.

***Trở lại bài toán:** Ta có: $(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(n+1)^n\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{2nn}C_{2n}^{i}.x^{2n-i}=\left(\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i.x^{n-i}\right).\left(\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^{n-i}.x^i\right)$.

Đồng nhất hệ số của x^{2n} ở hai vế, ta có: $C_{2n}^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i.C_n^{n-i}=\sum\limits_{i=0}^{n}(C_n^i)^2$.

Do đó, với mọi n tự nhiên thì $S_n=C_{2n}^n$.

Như thế ta cần chứng minh rằng: $C_{4n}^{2n}+1$ không chia hết cho 3 với mọi n.

Giả sử: $2n=\sum\limits_{i=0}^{k}a_i.3^i,\ a_i\in\mathbb{N},i=\overline{1,k}$. Xét hai trường hợp:

- Nếu $a_i\in\{0;1\},\forall i=\overline{1,k}$ thì $2a_i\in\{0;2\},\forall i=\overline{1,k}$ và tổng $a_i\in\{0;1\},\forall i=\overline{1,k}$ là số chẵn, đặt $\sum\limits_{i=0}^{k}a_i=2t,t\in\mathbb{N}\Rightarrow 2^{\sum\limits_{i=0}^{k}a_i}=2^{2t}=4^t\equiv 1\pmod 3$; ta cũng có: $4n=\sum\limits_{i=0}^{k}2a_i.3^i,\ a_i\in\mathbb{N},i=\overline{1,k}$.

Theo bổ đề trên thì $C_{4n}^{2n}+1\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}C_{2a_i}^{a_i}+1\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}2^{a_i}+1\equiv 2^{\sum\limits_{i=0}^{k}a_i}+1\equiv 2\pmod 3$.

- Nếu tồn tại một giá trị $a_j=2$; không mất tính tổng quát, giả sử đây là số nhỏ nhất trong tập hợp $a_i,i=\overline{0,k}$. Khi đó: hệ số tương ứng tại vị trí j ở khai triển theo lũy thừa 3 của 4n là 1. Mà $C_1^2=0$ nên $C_{4n}^{2n}\equiv\prod\limits_{i=0}^{k}C_{2a_i}^{a_i}\equiv 0\pmod 3\Rightarrow C_{4n}^{2n}+1\equiv 1\pmod 3$.

Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có $S_{2n}+1$ không chia hết cho 3. Đây chính là đpcm.

PHẦN 3

*****

HÌNH ẢNH CỦA ĐỘI TUYỂN QUA CÁC NĂM

***Năm 2005.**

***Đội tuyển Việt Nam thi IMO 2005:**

1.Trần Trọng Đan

2.Phạm Kim Hùng

3.Nguyễn Nguyên Hùng

4.Đỗ Quốc Khánh

5.Trần Chiêu Minh

6.Nguyễn Trường Thọ

***Năm 2006.**

***Đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2006:**

1. Đặng Bảo Đức

2. Hoàng Mạnh Hùng

3. Nguyễn Duy Mạnh

4. Lê Hồng Quý

5. Nguyễn Xuân Thọ

6. Lê Nam Trường

***Năm 2007:**

***Đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2007:**

1. Đỗ Xuân Bách

2. Nguyễn Xuân Chương

3. Lê Ngọc Sơn

4. Phạm Thành Thái

5. Đỗ Ngọc Thanh

6. Phạm Duy Tùng

***Năm 2008:**

***Đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2008:**

1. Lê Ngọc Anh

2. Nguyễn Phạm Đạt

3. Dương Trọng Hoàng

4. Đỗ Thị Thu Thảo

5. Đặng Trần Tiến Vinh

6. Hoàng Đức Ý

***Năm 2009:**

***Đội tuyển Việt Nam thi IMO 2009:**

1. Hà Khương Duy

2. Nguyễn Xuân Cương

3. Nguyễn Hoàng Hải

4. Phạm Hy Hiếu

5. Phạm Đức Hùng

6. Tạ Đức Thành

***Năm 2010:**

***Đội tuyển Việt Nam thi IMO 2010:**

1. Phạm Việt Cường

2. Nguyễn Kiều Hiếu

3. Nguyễn Minh Hiếu

4. Trần Thái Hưng

5. Vũ Đình Long

6. Nguyễn Ngọc Trung