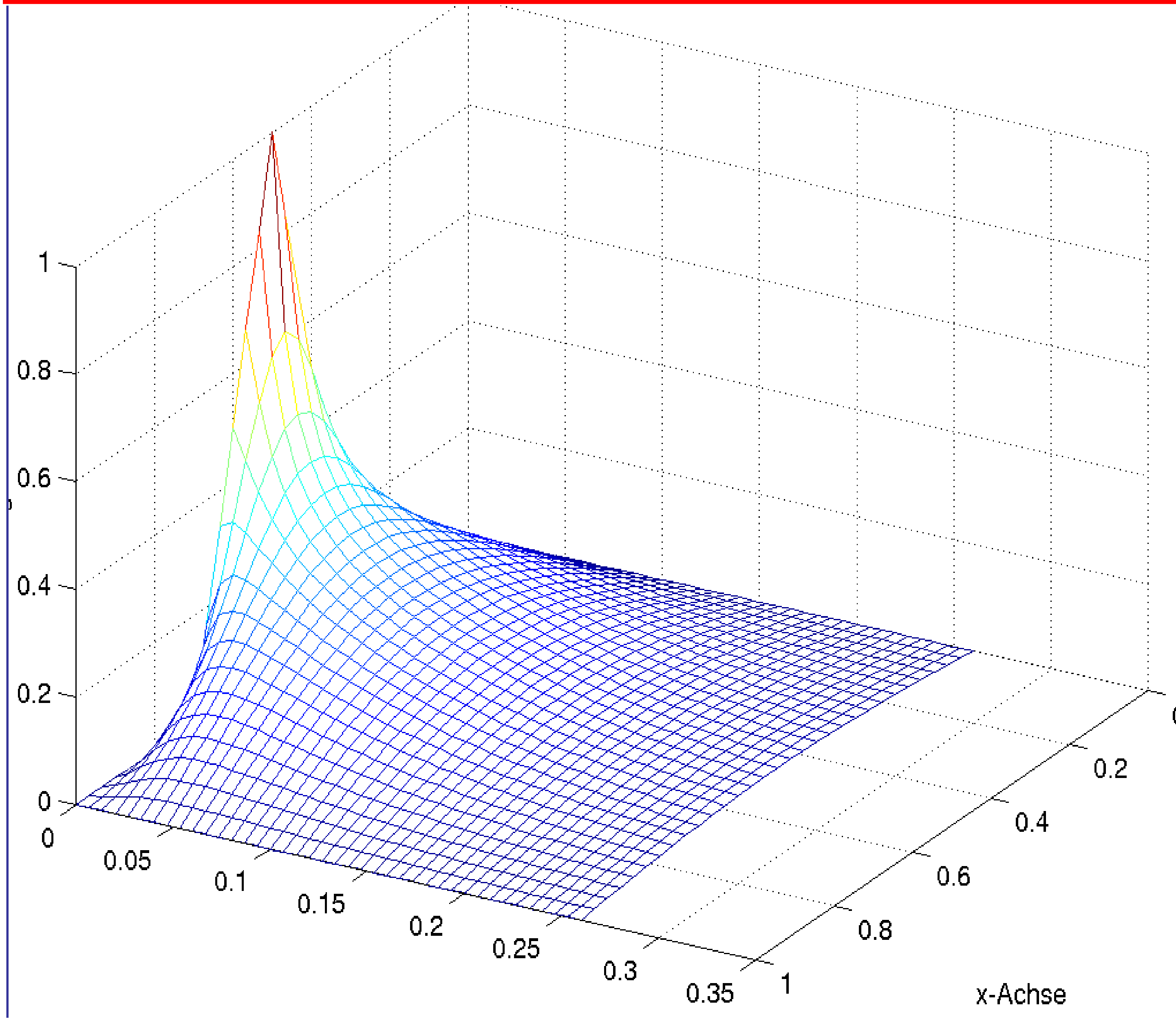
លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យា



រូបមន្តសំខាន់ៗគួរចងចាំ

I. រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ងាយៗ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = k$	$y' = 0$
2. $y = x^{n}$	$y' = n\,x^{n-1}$
3. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^{2}}$
4. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $y = e^{x}$	$y' = e^{x}$
6. $y = a^{x}$	$y' = a^{x}\ln a$
7. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
8. $y = \sin x$	$y = \cos x$
9. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
10. $y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^{2} x} = 1 + \tan^{2} x$
11. $y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^{2} x} = -(1 + \cot^{2} x)$
12. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$
13. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$
14. $y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1 + x^{2}}$

II. រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = u^n$	$y' = n.u'.u^{n-1}$
2. $y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. $y = u.v$	$y' = u'v + v'u$
4. $y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
6. $y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$
7. $y = \cos u$	$y' = -u'\sin u$
8. $y = e^u$	$y' = u'.e^u$
9. $y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
10. $y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
11. $y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
12. $y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
13. $y = u^V$	$y' = u^V\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$
14. $y = a^u$	$y' = a^u \ln a$
15. $y = f\left[\varphi(x)\right]$	$y' = \varphi'(x) f'\left[\varphi(x)\right]$
16. $y = \int f(x).dx$	$y' = f(x)$

II -អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

☞ រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗ

១. $\int k.dx = k.x + c$

២. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$

៣. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

៤. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

៥. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

៦. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

៧. $\int \cos x.dx = \sin x + c$

៨. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

៩. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

១០. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

១១. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

១២. $\int e^x.dx = e^x + c$

១៣. $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

១៤. $\int \sin ax.dx = -\frac{1}{a}.\cos ax + c$

១៥. $\int \cos ax.dx = \frac{1}{a}.\sin ax + c$

១៦. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}.e^{ax} + c$

១៧. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + c$

១៨. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

១៩. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$

២០. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}.\arctan(\frac{x}{a})+c$

២១. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

២២. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

២៣. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin(\frac{x}{a})+c$

☞ **រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ :**

១. $\int \frac{P'(x)}{P(x)}.dx=\ln|P(x)|+c$

២. $\int \frac{P'(x)}{P^2(x)}.dx=-\frac{1}{P(x)}+c$

៣. $\int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx=2\sqrt{P(x)}+c$

៤. $\int e^{P(x)}.P'(x).dx=e^{P(x)}+c$

៥. $\int P^n(x).P'(x).dx=\frac{P^{n+1}(x)}{n+1}+c$

☞ **រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក** $\boxed{\int U.dV=U.V-\int V.dU}$

☞ **រូបមន្តអាំងតេក្រាលប្តូរអថេរ**

-បើគេមាន $I=f[\varphi(x)].\varphi'(x).dx$ តាង $u=\varphi(x)$ នាំឱ្យ $du=\varphi'(x).dx$

គេបាន $I=\int f(u).du$ ។

-បើគេមាន $I=\int f(x).dx$ តាង $x=\varphi(t)$ នាំឱ្យ $dx=\varphi'(t).dt$

គេបាន $I=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$ ។

☞ **រូបមន្តអាំងតេក្រាលផ្សេងៗ**

១. $\int u^n.du = \frac{1}{n+1}.u^{n+1} + c$

២. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

៣. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

៤. $\int e^u.du = e^u + c$

៥. $\int \sin u.du = -\cos u + c$

៦. $\int \cos u.du = \sin u + c$

៧. $\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

III –អាំងតេក្រាលកំនត់

១ –រូបមន្តឡិបនិច –ញូតុន

អាំងតេក្រាលកំនត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាផលដក $F(b) - F(a)$ ។ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ គេកំនត់សរសេរ :

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

២ –លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់

ក. $\int_a^a f(x).dx = 0$

ខ. $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

គ. $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

ឃ. $\int_a^b [f(x) + g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

ង. $\int_a^b [f(x)-g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$

ច. $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(z).dz = \int_a^b f(t).dt$

៣ -រូបមន្តប្តូរអថេរ

-សន្មតថាគេមាន $I = \int_a^b f(x).dx \quad (1)$

បើគេតាង $x = \varphi(t)$ នាំអោយ $dx = \varphi'(t).dt$ ហើយចំពោះ $x \in [a,b]$

នោះ $t \in [t_1, t_2]$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_a^b f(x).dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt}$

-សន្មតថាគេមាន $I = \int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x).dx \quad (2)$

បើគេតាង $u = \varphi(x)$ នាំអោយ $du = \varphi'(x).dx$

ចំពោះ $x \in [a,b]$ នោះ $u \in [\varphi(a), \varphi(b)]$

គេបាន $\boxed{I = \int_a^b f[\varphi(x)].\varphi'(x).dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u).du}$

៤ -រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\boxed{\int_a^b u.dv = [u.v]_a^b - \int_a^b v.du}$$

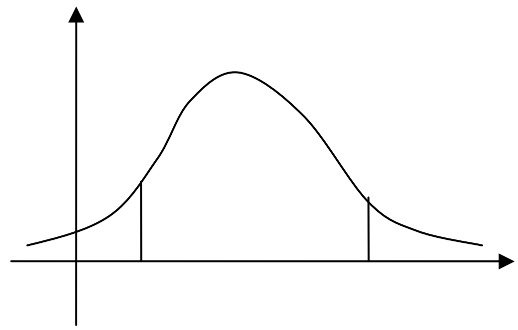
៥ -គណនាក្រឡាផ្ទៃ

ក. ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៏ និង អក័្សអាប់ស៊ីស

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ ជាមួយអក័្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$និង

បន្ទាត់ $x = a$ និង $x = b$ កំនត់ដោយ :

$$S=\int_a^b f(x).dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$



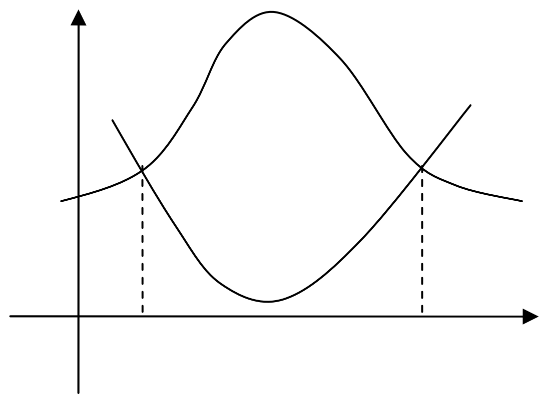
ខ. ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_1): y=f(x)$ និង $(C_2): y=g(x)$

លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]: f(x)\geq g(x)$

កំនត់ដោយ

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)].dx$$



៦ -គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តន៍

ក. មាឌសូលីតបរិវត្តន៏កំនត់បានពីររង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌ័ដោយ

ខ្សែកោង $(c): y=f(x)$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ ៖

$$V=\pi\times\int_a^b [f(x)]^2.dx$$ ។

ខ. មាឌសូលីតបរិវត្តន៏កំនត់បានពីររង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌ័ដោយខ្សែកោងពីរ៖

$(c_1): y=f(x)$ និង $(c_2): y=g(x)$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$កំនត់ដោយ ៖

$$V=\pi\times\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]dx$$ ដែល $\left(f(x)\geq g(x) \ ,\forall x\in[a,b] \right)$ ។

អនុគមន៍មានច្រើនអថេរ

1-សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ

គេនិយាយថាទំហំអថេរ Z ជាអនុគមន៍នៃពីរអថេរ x, y ប្រសិនបើចំពោះគ្រប់សំណុំនៃតម្លៃ (x, y) នៃដែនកំនត់ដែលឱ្យ វាត្រូវតម្លៃកំនត់តែមួយគត់ចំពោះ Z ។ អថេរ x, y ហៅថាអថេរ Independents ។

គេកំនត់សរសេរ $Z = f(x, y)$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 : ចូរបញ្ចាក់មាឌ V នៃកោនមួយជាអនុគមន៍នៃជនេត្រ x និងកាំថាសបាត y ។

យើងដឹងថាមាឌរបស់កោនដែលមានកំពស់ h និងកាំថាសបាត y កំនត់ដោយ :

$V = \frac{1}{3}\pi . y^2 h$ តែ $h = \sqrt{x^2 - y^2}$

ដូចនេះ $V = f(x, y) = \frac{1}{3}\pi\, y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$ ជាអនុគមន៍មានពីរអថេរ ។

បើគេឱ្យ $x = 10cm$, $y = 8cm$ នោះគេបាន :

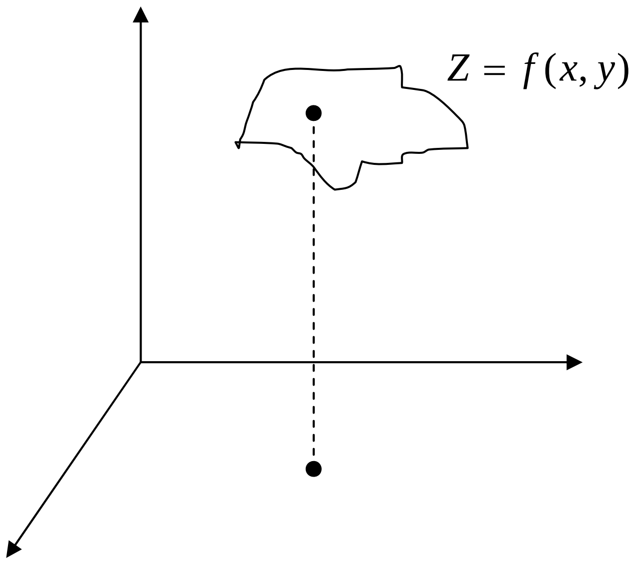
$V = f(10\ ,\ 8) = \frac{1}{3}\pi\ 8^2 \sqrt{10^2 - 8^2} = 128\pi\ cm^3$ ។

ឧទាហរណ៍2 : ប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x, y, z ត្រូវមានអង្កត់ទ្រូងធំកំនត់ដោយ $d = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ ។

បើ $x = 2, y = 3, z = 6$ នោះ $d = f(2,3,6) = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ ។

2-ដែនកំនត់ដែលមាននៃអនុគមន៍

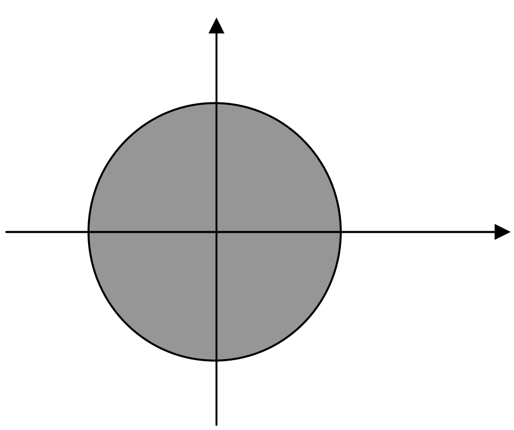
ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $Z = f(x, y)$ ជាសំណុំនៃចំនុច $M(x, y)$ នៃប្លង់ XOY ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍អាចកំនត់បាន (មានន័យ) ។



ឧទាហរណ៏ : ចូររកដែនកំនត់ដែលមាននៃអនុគមន៍ $Z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ ។

អនគមន៏អាចកំនត់បានប្រសិនបើ $4 - x^2 - y^2 > 0$ ឬ $x^2 + y^2 < 4$

ជាសំណុំចំនុចខាងក្នុងរង្វង់ផ្ចិត 0 កាំ $R = 2$ ។



3-លីញ និង ផ្ទៃនៃនីវ៉ូរបស់អនុគមន៍

<u>និយមន័យ</u> : គេហៅ លីញនៃនីវ៉ូនៃអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$ គឺជាក្រាប $f(x,y) = C$ នៃប្លង់ XOY ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរសង់ លីញនៃនីវ៉ូនៃអនុគមន៍ $z = x^2 y$?

<u>និយមន័យ</u> : គេហៅផ្ទៃនៃនីវ៉ូរបស់អនុគមន៍បីអថេរ $U = f(x,y,z)$ គឺជាផ្ទៃកំនត់ដោយសមីការ $f(x,y,z) = C$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរសង់ លីញនៃនីវ៉ូនៃអនុគមន៍ $U = 2x + 2y + z - 4$?

4-ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍មានពីរអថេរមួយកំនត់ជាប់ក្នុងដែន D ដោយ

$\mathrm{Z} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$

-បើ y មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ x ។

-បើ x មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ y ។

<u>ក. និយមន័យ</u> :

ចំពោះ y មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ x ហើយបើ Z មានដេរីវេធៀបនឹង x នោះដេរីវេនេះគេហៅថាដេរីវេដោយផ្នែករបស់អនុគមន៍

$\mathrm{Z} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ។

ធៀបនឹង x ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$Z'_x = f'_x(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x\,,\,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

ដូចគ្នាដែរគេមាន : $$Z'_y = f'_y(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x\,,\,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 : គេឱ្យអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + 5xy^2 - 7y^3$ ។

ចូរគណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍នេះ ?

គេបាន $Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 6x^2 + 6xy + 5y^2$

និង $Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = 3x^2 + 10xy - 21y^2$ ។

ឧទាហរណ៍2 :គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ :

$Z = f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

គេបាន : $Z'_x = 3x^2 - 3yz$, $Z'_y = 3y^2 - 3xz$, $Z'_z = 3z^2 - 3xyz$ ។

ឧទាហរណ៍3 : គេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

ចូរគណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍នេះ ?

គេបាន $Z'_x = \frac{(x^2+y^2)'}{x^2+y^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $Z'_y = \frac{(x^2+y^2)'}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2}$ ។

ឧទាហរណ៍4 : គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = e^{x^3+y^3}$

គេបាន $Z'_x = (x^3 + y^3)'e^{x^3+y^3} = 3x^2e^{x^3+y^3}$, $Z'_y = (x^3 + y^3)'e^{x^3+y^3} = 3y^2e^{x^3+y^3}$ ។

ឧទាហរណ៍5 : គណនាដេរីវេតាមផ្នែកនៃអនុគមន៍ :

$Z = f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x + x^x y^y z^z$, $x > 0, y > 0, z > 0$ ។

គេបាន $Z'_x = y\,x^{y-1} + z^x \ln z + x^x y^y z^z (1 + \ln x)$

$Z'_y = x^y \ln x + zy^{z-1} + x^x y^y z^z (1 + \ln y)$

$Z'_z = y^z \ln y + xz^{x-1} + x^x y^y z^z (1 + \ln z)$

5-ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍មួយ

ក. ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$, $\forall x, y \in D$ មានដេរីវេទីមួយ ។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបត្រង់ចំនុច (x,y) កំនត់ដោយ :

$$\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}.dx + \frac{\partial Z}{\partial y}.dy}$$ ។

ឧទាហរណ៏ : រកឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៏ $z = x^2 + 4xy + 3y^2$

គេបាន $dZ = (2x + 4y).dx + (4x + 6y).dy$ ។

ខ. ឧបមាថាគេមានអនុគមន៏ $Z = f(x, y, z)$, $\forall x, y, z \in D$ មានដេរីវេទីមួយ ។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបត្រង់ចំនុច (x, y, z) កំនត់ដោយ :

$$\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}.dx + \frac{\partial Z}{\partial y}.dy + \frac{\partial Z}{\partial z}.dz}$$

ឧទាហរណ៏ : រកឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៏ :

$Z = f(x, y, z) = \ln(2x^2 + 5y^2 + 4z^2)$

គេបាន $dZ = \frac{4x}{2x^2 + 5y^2 + 4z^2}.dx + \frac{10y}{2x^2 + 5y^2 + 4z^2}.dy + \frac{8z}{2x^2 + 5y^2 + 4z^2}dz$

6-**ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ទីពីរ**

ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ពីររបស់អនុគមន៏ $Z = f(x, y)$ គឺជាដេរីវេ

ដោយផ្នែករបស់ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់មួយ ។

គេតាងដេរីវេលំដាប់ទីពីរដោយ :

1. $f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$
2. $f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$
3. $f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y.\partial x}$
4. $f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x.\partial y}$

ឧទាហរណ៏ : គេឱ្យអនុគមន៏ $Z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2y + 5xy^2 + 3$

ចូរគណនា f''_{xx} , f''_{yy} , f''_{xy} និង f''_{yx} ?

7-**បរមាភាគធំនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ**

ក. និយមន័យ ៖

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$

-គេថាអនគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ចំនុច $M(x_0,y_0)$ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនុច $M(x,y)$ ក្នុងវិណាស៊ីណានៃចំនុចM_0 គេបាន ៖ $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ ។

- គេថាអនគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ចំនុច $M(x_0,y_0)$ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនុច $M(x,y)$ ក្នុងវិណាស៊ីណានៃចំនុចM_0 គេបាន ៖$f(x_0,y_0)<f(x,y)$ ។

ខ.របៀបកំនត់បរមានៃអនុគមន៍មានពីរថេរ ៖

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍$Z=f(x,y)$ដែលមានដេរីវេ ។

ដើម្បីកំណត់រកបរិមានៃអនុគមន៍គេត្រូវ៖

១-គណនាដេរីវេដោយផ្នែកគឺ៖$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$

២-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖ $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

ឧបមាថាប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ (x_0, y_0)

៣-គណនាបរិមាណ $a=f''_{xx}(x,y)$, $b=f''_{xy}(x,y)$, $c=f''_{yy}(x,y)$

៤-គណនាបរិមាណ $\Delta=ac-b^2$

☞ បើ $\Delta>0$, $a>0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ មានអប្បបរមា ។

☞ បើ $\Delta>0$, $a<0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ មានអតិបរមា ។

☞ បើ $\Delta<0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ គ្មានបរមា ។

☞ បើ $\Delta=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

ឧទាហរណ៍: គេអោយអនុគមន៏ $Z = f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy - 6x - 6y + 34$

រកបរិមានៃអនុគមន៏នេះ ។

-គណនាដេរីវេ $Z'_x = 4x - 2y - 6$ and $Z'_y = 10y - 2x - 6$

-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័ $\begin{cases} 4x - 2y - 6 = 0 \\ 10y - 2x - 6 = 0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័មានគូចម្លើយ $x = 2$, $y = 1$

-គណនាបរិមាណ $\Delta = ac - b^2$

ដោយគេមាន $a = Z''_{xx} = 4$, $b = Z''_{xy} = -2$, $C = Z''_{yy} = 10$

គេបាន $\Delta = 40 - 4 = 36 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៏មានអប្បរមាត្រង់ $M_0(2,1)$

តម្លៃអប្បបរមានោះគឺ $Z_{min} = f(2,1) = 25$ ។

8-ដេរីវេនៃអនុគមន៍គំប៉ូហ្សេ

ក. ករណីអថេរធៀបតែមួយ :

ប្រសិនបើ $Z = f(x, y)$ ជាអនុគមន៏នៃអថេរ x, y ដែល $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៏អាចគណនាតាមរូបមន្ត :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \quad ។$$

ឧទាហរណ៍ : គណនា $\frac{dZ}{dt}$ ប្រសិនបើ $Z = e^{3x+2y}$ ដែល $x = \cos t$, $y = t^2$

ខ. ករណីអថេរធៀបច្រើន :

ប្រសិនបើ $Z = f(x, y)$ ជាអនុគមន៏នៃអថេរ x, y ដែល

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$

ដេរីវេនៃអនុគមន៏ធៀបនិង u និង v អាចគណនាតាមរូបមន្ត :

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{និង} \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

ឧទាហរណ៏1 . ចូរគណនា $\frac{\partial Z}{\partial u}$ និង $\frac{\partial Z}{\partial v}$ បើ $Z = \sin x + \sin y$

ដែល $x = \cos u + \sin v$, $y = \sin u + \cos v$ ។

ឧទាហរណ៏2. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៏ $Z = \varphi(x^2 + y^2)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$$y\frac{\partial Z}{\partial x} - x\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad ។$$

9-ដេរីវេក្នុងទិសដៅឱ្យ និង ក្រាដ្យង់នៃអនុគមន៍មួយ

ក. ដេរីវេនៃអនុគមន៏មួយក្នុងទិសដែលឱ្យ

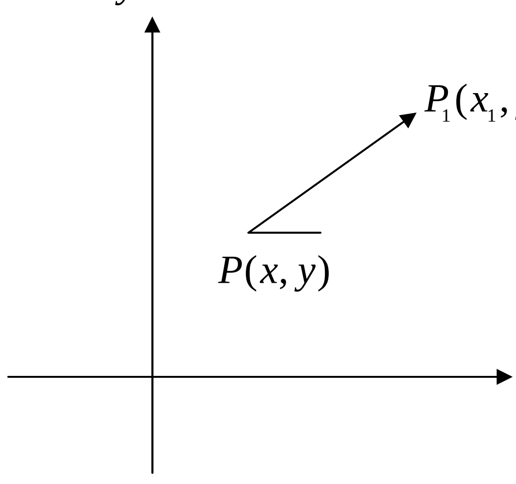
ដេរីវេនៃអនុគមន៏ $Z = f(x, y)$ ក្នុងទិសដែលឱ្យ $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{PP_1}$ កំនត់ដោយ :

$\frac{\partial Z}{\partial l} = \lim\limits_{P_1P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P}$ ដែល $f(P_1)$, $f(P)$ ជាតម្លៃនៃអនុគមន៏នៅត្រង់

ចំនុច P_1 និង P ។

ប្រសិនបើ Z ជាអនុគមន៏មួយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល នោះគេបានរូបមន្ត :

$\frac{\partial Z}{\partial l} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Z}{\partial y}\sin\alpha$ ដែល α ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{l}$ និងអក្ស៊ OX ។



ឧទាហរណ៏ : ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៏ $Z = 2x^2 - 3y^2$ ក្នុងទិសមួយកំនត់

ជាមួយអក្ស៊ OX និងមុំ $120°$ ត្រង់ចំនុច $P(1 , 0)$ ។

ខ. ក្រាដ្យង់នៃអនុគមន៍មួយ :

គេហៅ ក្រាដ្យង់នៃអនុគមន៍មួយ $Z = f(x,y)$ គឺជាវ៉ិចទ័រដែលចំនោលទាំងឡាយ លើអក្ស័នៃកូអរដោនេជាដេរីវេដោយផ្នែកត្រូវគ្នារបស់អនុគមន៍ដែលឱ្យ ។

គេកំនត់សរសេរ : $\overrightarrow{grad}\, Z = \frac{\partial Z}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\vec{j}$ ។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ក្នុងទិសវ៉ិចទ័រ $\vec{l}$ ត្រូវភ្ជាប់ទៅនិងក្រាដ្យង់នៃអនុគមន៍នេះ តាមរូបមន្ត $\frac{\partial Z}{\partial l} = proj_{\vec{l}}\, \overrightarrow{drad}\, Z$ មានន័យថាក្នុងទិសដៅដែលឱ្យ គឺវាស្មើនឹង ចំនោលកែងនៃក្រាដ្យង់លើទិសដៅនៃដេរីវេ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនា និង សង់ក្រាដ្យង់នៃអនុគមន៍ $Z = x^2 y$ ត្រង់ចំនុច $P(1,1)$ ។

10-អាំងតេក្រាលនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

ក. លក្ខខណ្ឌនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប :

កន្សោម $P(x,y).dx + Q(x,y).dy$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍កំនត់ដោយ $U = f(x,y)$ ដែល $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងដែនកំនត់រួម D លុះត្រាតែ និងគ្រាន់តែវាបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថាកន្សោម $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍មួយ រួចកំនត់រកអនុគមន៍នោះ ។

ខ. ករណីអនុគមន៍មានបីអថេរ :

កន្សោម $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z).dz$ ជាឌីផេរ៉ង់សរុបនៃ អនុគមន៍ $U = f(x,y,z)$ លុះត្រាតែវាបំពេញលក្ខខ័ណ្ឌ :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ ។

ឧទាហរណ៍ :បង្ហាញថាកន្សោម $(3x^2 + 3y - 1)dx + (z^2 + 3x)dy + (2yz + 1)dz$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍មួយ រួចកំនត់រកអនុគមន៍នោះ ។

11-**អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប**

រូបមន្តញូតុន -ឡិបនិច :

បើកន្សោម $P(x,y).dx+Q(x,y).dy$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

នៃអនុគមន៍កំនត់ដោយ $U=f(x,y)$ ដែល $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ

ខ្សែកោង (L) ពីចំនុច $M_1(x_1,y_1)$ ទៅចំនុច $M_2(x_2,y_2)$ នោះគេបាន :

$$\int_{(L)} P(x,y).dx+Q(x,y).dy=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y).dx+Q(x,y).dy$$
$$=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1)$$

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងខាងក្រោម :

$I=\int_{(MN)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4).dy$ ដែល $M(-2,-1)$, $N(3,0)$ ។

12-**ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត**

ក. ករណីអថេរតែមួយ

ប្រសិនបើសមីការ $f(x,y)=0$ ដែលអនុគមន៍ $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍មាន

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលធៀបនឹង x,y ។គេកំនត់ y ជាអនុគមន៍នៃ x ។ ដូចនេះដេរីវេនៃ

អនុគមន៍នេះ ឱ្យក្រោមទម្រង់អាំព្លីស៊ីត ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌ $f'_y(x,y)\neq 0$

តាមរូបមន្ត $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនា $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ បើ $(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0$ ។

ខ. ករណីអថេរច្រើន

ដូចគ្នាដែ បើសមីការ $F(x,y,z)=0$ ដែលអនុគមន៍ $F(x,y,z)$ ជាអនុគមន៍មាន

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលធៀបនឹង x,y,z ។គេកំនត់ z ជាអនុគមន៍នៃ x,y ។

ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍នេះ ឱ្យក្រោមទម្រង់អាំព្លីស៊ីត ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌ

$f'_z(x,y,z)\neq 0$ តាមរូបមន្តខាងក្រោម :

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីរកឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ z ពីសមីការ $F(x,y,z)=0$

គេត្រូវរកតាមរូបមន្ត $\frac{\partial F}{\partial x}.dx+\frac{\partial F}{\partial y}.dy+\frac{\partial F}{\partial z}.dz=0$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ដែល $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$ ។

13-ប្លង់ប៉ះ នឹង នរម៉ាល់ទៅនឹងផ្ទៃមួយ

ក. សមីការនៃប្លង់ប៉ះ នឹង នរម៉ាល់ក្នុងករណីដែលផ្ទៃអោយតាមសមីការអ៊ិចព្លីស៊ិត :

ប្រសិនបើសមីការនៃផ្ទៃក្នុងកូអរដោនេចតុកោណកែងឱ្យក្រោមទំរង់ $Z=f(x,y)$ ដែល $f(x,y)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

-សមីការប្លង់ប៉ះត្រង់ចំនុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ នៃផ្ទៃ $Z=f(x,y)$ កំនត់ដោយ :

$Z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(X-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(Y-y_0)$ ។

-សមីការនរម៉ាល់ត្រង់ចំនុច$M_0(x_0,y_0,z_0)$ នៃផ្ទៃ $Z=f(x,y)$ កំនត់ដោយ :

$\frac{X-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{Y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{Z-z_0}{-1}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្កើតប្លង់ប៉ះ និង នរម៉ាល់នៃផ្ទៃ $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ ត្រង់ $M(2,-1\ ,\ 1)$

ខ. សមីការនៃប្លង់ប៉ះ នឹង កែងក្នុងករណីដែលផ្ទៃអោយតាមសមីការអាំព្លីស៊ិត :

ប្រសិនបើសមីការនៃផ្ទៃក្នុងកូអរដោនេចតុកោណកែងឱ្យក្រោមទំរង់ $F(x,y,z)=0$ និង $F(x_0,y_0,z_0)=0$ ។

សមីការប្លង់ប៉ះ និង នរម៉ាល់កំនត់រៀងគ្នាដោយ :

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(X-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(Y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(Z-z_0)=0$$

$$\frac{X-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{Z-z_0}{F'_Z(x_0,y_0,z_0)}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. ចូរកំនត់ និង គាងដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

ខ. $Z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

គ. $Z=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

ឃ. $Z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$

ង. $Z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}$, $a,b,c\in IR^*$ ។

2. ចូរសង់ លីញ៉ូនៃនីវ៉ូរបស់អនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $Z=x+y$

ខ. $Z=\sqrt{xy}$

គ. $Z=\dfrac{y}{x^2}$

ឃ. $Z=x^2+y^2$

ង. $Z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$

3. ចូរគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $Z=x^3+y^3-3xy$

ខ. $Z=x^2y^5$

គ. $Z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

ឃ. $Z=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$

ង. $Z=\arctan\left(\dfrac{xy}{z^2}\right)$

ច. $Z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4. ចូរគណនា $\dfrac{dz}{dt}$ បើ $z=\dfrac{x}{y}$, $x=e^t$, $y=\ln t$ ។

5. ចូរគណនា $\dfrac{du}{dt}$ បើ $u=\ln\left(\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)$, $x=3t^2$, $y=\sqrt{1+t^2}$ ។

6. ចូរគណនា $\dfrac{du}{dt}$ ដែល $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $z=h$ ។

7. ចូរគណនា $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{dz}{dx}$ បើ $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$, $y=x^2$ ។

8. គេមានអនុគមន៍ $W=f(u,v)$ ដែល $u=x+at$, $v=y+bt$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\partial W}{\partial t}=a\frac{\partial W}{\partial x}+b\frac{\partial W}{\partial y}$ ។

9. គេមានអនុគមន៍ $Z=xy+x\varphi(\frac{y}{x})$

ចូរបង្ហាញថា $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ ។

10. គេឱ្យ $Z=e^{y}.\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ ។

ចូរស្រាយថា $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$ ។

11. ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $z=x^2-xy-2y^2$ ត្រង់ចំនុច $P(1\ ,2)$ ក្នុងទិសបង្កើតជាមួយអក្ស័ OX នូវមុំ $60°$ ភ្ជាប់ទៅចំនុច $P(1\ ,\ 2)$ ។

12. ចូរគណនា $\overrightarrow{grad}\,Z$ ត្រង់ចំនុច $P(2\ ,1)$ បើ $Z=x^3+y^3-3xy$ ។

13. ចូរគណនា $\overrightarrow{grad}\,Z$ ត្រង់ចំនុច $P(5\ ,3)$ បើ $Z=\sqrt{x^2-y^2}$ ។

14. ចូរគណនា $\overrightarrow{grad}\,Z$ ត្រង់ចំនុច $P(1\ ,2,2)$ បើ $Z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ។

15. ចូរគណនា $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial z\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$

ខ. $Z=\ln(x^2+y^2)$

គ. $z=\sqrt{2xy+y^2}$

ឃ. $z=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

16. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $u=\arctan\frac{y}{x}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $Laplace$ ខាងក្រោម ៖

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$ ។

17. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi).\sin\lambda x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

Cordes vibrantes : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ។

18. គេឱ្យអនុគមន៍ $z=x\varphi(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x})$ ។

ចូរបង្ហាញថា $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ ។

19. ចូរកំនត់រកអនុគមន៏ $Z = f(x,y)$ ដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបខាងក្រោម :

ក. $dZ = (2x + y).dx + (x + 2y)dy$

ខ. $dZ = ydx + xdy$

គ. $dZ = (\cos x + 3x^2 y)dx + (x^3 - y^2)dy$

ឃ. $dz = \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx - \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2} dy$

ង. $dZ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$

20. ចូរកំនត់សមីការប្លង់ប៉ះ និង នរម៉ាល់ទៅនឹងផ្ទៃ $z = x^2 + y^2$ ត្រង់ $M(1,-2,5)$ ។

21. ចូរកំនត់សមីការប្លង់ប៉ះ និង នរម៉ាល់ទៅនឹងផ្ទៃ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ ត្រង់ចំនុច $M(4\,,3\,,4)$ ។

22. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ប៉ះ និង នរម៉ាល់ទៅនឹងផ្ទៃដែលមានសមីការ :

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ ត្រង់ចំនុច $M(2,-3,1)$ ។

23. គណនាអាំងតេក្រាល Curvilinear ខាងក្រោម :

ក. $I = \displaystyle\int_{(2\,,1)}^{(3\,,2)} (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$

ខ. $I = \displaystyle\int_{(1,2)}^{(2,1)} (3x^2 + 2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)dy$

គ. $I = \displaystyle\int_{(1\,,-2)}^{(2\,,1)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2 y^2 - 5y^4)dy$

ឃ. $I = \displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy$

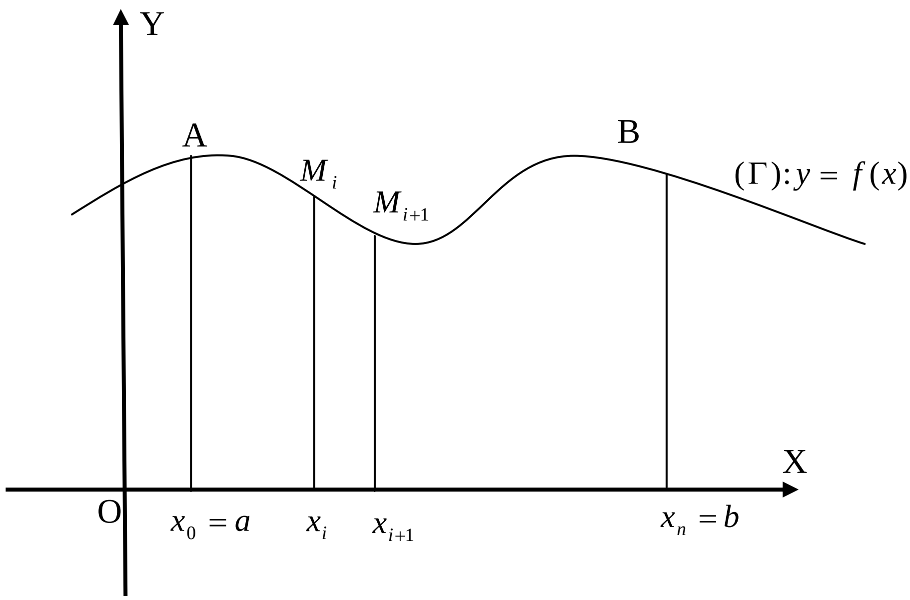
ង. $I = \displaystyle\int_{(1,\,2)}^{(3\,,4)} \left(3x^2 - 2xy + y^2\right).dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right).dy$

ច. $I = \displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,3,6)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ។

អាំងតេក្រាលឌុប

I-និយមន័យ :

ក.រំលឹកអាំងតេក្រាលកំនត់ :



ចែកអង្កត់ $[a\ ,\ b]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នាដោយចំនុច $x_i = a + \frac{b-a}{n}.i$

ដែល $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ ។

ផលបូក Reimann : $\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i).\Delta x_i\right]$ យក $d = \max \Delta x_i$ គេបាន :

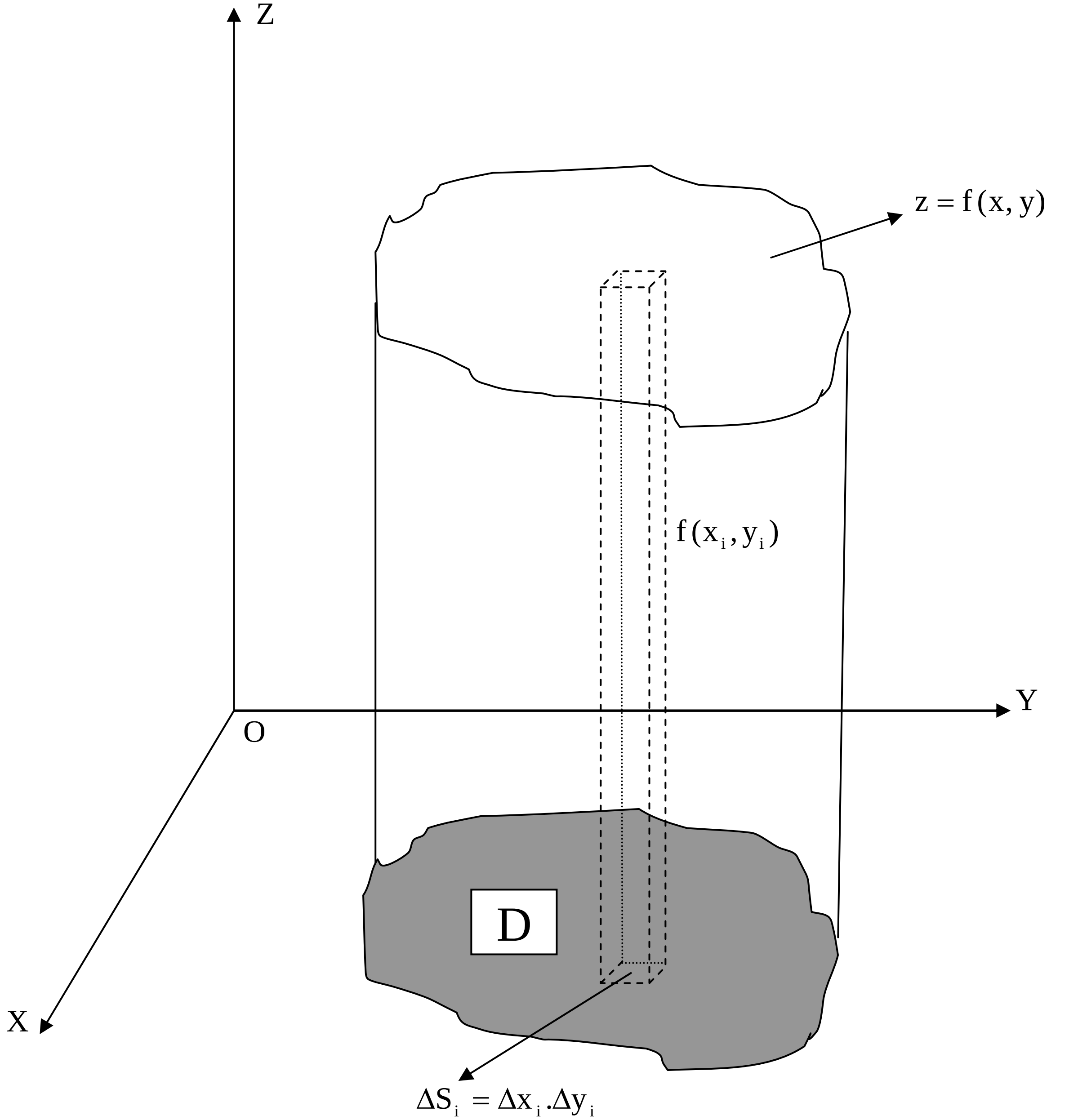
$$\boxed{\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i).\Delta x_i\right] = \int_a^b f(x).dx}$$ (បើលីមីតនេះមានអត្ថិភាព) ។

-ប្រសិនបើ $a = 0, b = 1$ នោះគេមាន $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ គេបាន :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\frac{i}{n})\right]\right) = \int_0^1 f(x).dx}$$ ។

៩.បញ្ហាកំនត់រកមាឌកំនត់ដោយផ្ទៃ $z = f(x,y)$ **និងប្លង់** $z = 0$

ក្នុងដែន D លើ (xoy) **:**



គេមាន $f(x_i, y_i).\Delta S_i$ = Volume collonnette

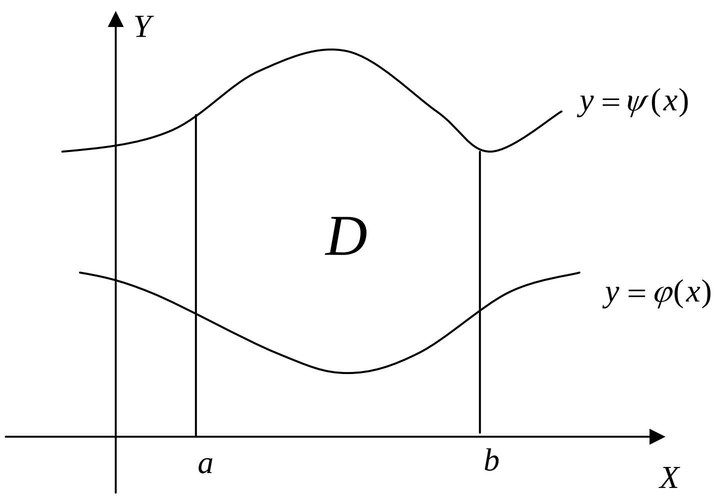
ផលបូករីម៉ង់ $\sum_i f(x_i, y_i).\Delta S_i$ ហៅថាតម្លៃប្រហែលនៃមាឌកំនត់ដោយផ្ទៃ $z = f(x,y)$

និងប្លង់ $z = 0$ ក្នុងដែន D លើ (xoy) ។ $d = \max \Delta S_i$

គេបាន $\boxed{V=\lim_{d\to 0}\sum_i\left[f(x_i,y_i).\Delta S_i\right]=\iint_D f(x,y).dS=\iint_D f(x,y).dxdy}$ ។

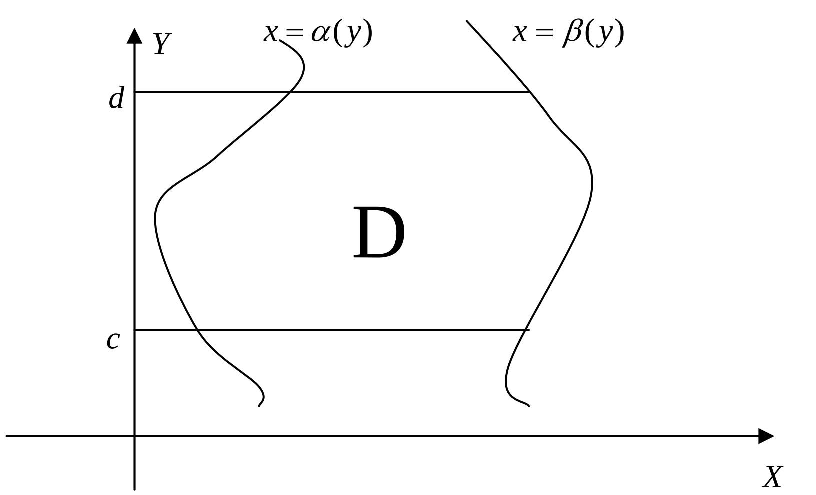
II -អាំងតេក្រាលក្នុងកូអរដោនេរ៉ិចតង់គុយល៉ែ :

ក.សន្មតថា $D=\{(x,y)/a\le x\le b\ ,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\ \}$



$$\boxed{\iint_D f(x,y).dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y).dy}$$

ខ.សន្មតថា $D=\{(x,y)/c\le y\le d\ ,\ \alpha(y)\le x\le\beta(y)\ \}$



$$\boxed{\iint_D f(x,y).dxdy=\int_c^d dy\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y).dx}$$

គ.សំគាល់ : បើ $D=\{(x,y)/a\le x\le b\ ,\ c\le y\le d\}$

គេបាន $\boxed{\iint_D f(x,y).dxdy=\int_a^b dx\int_c^c f(x,y).dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y).dx}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គណនា $I=\iint_D xy.dxdy$ ដែលដែនD កំនត់ដោយ $\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{cases}$

គេបាន $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy.dy=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{x}.dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-x^5).dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{24}$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គណនា $I=\iint_D (x+y)dxdy$ ដែលដែនD កំនត់ដោយ $\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le \sqrt{x}\end{cases}$

គេបាន $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y).dy=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}.dx=\int_0^1(x\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}).dx$

$$=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1=\frac{3}{10}\ ។$$

ឃ.លក្ខណះ

$a/\ \iint_D k.f(x,y).dxdy=k.\iint_D f(x,y)dxdy$

$b/\ \iint_D f(x,y).dxdy=.\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x.y)dxdy$ ដែល $D=D_1+D_2$ ។

$c/\ \iint_D [f(x,y)+g(x,y)].dxdy=.\iint_D f(x,y)dxdy+\iint_D g(x.y)dxdy$

III -**រូបមន្តប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលឌុប :**

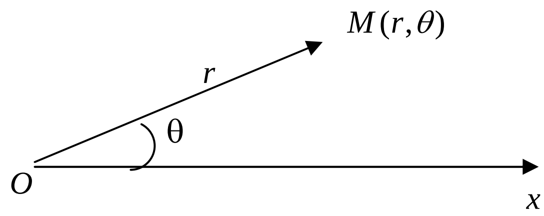
ក.ប្តូរពីគូអថេរ $(x,y)\to(u,v)$

ឧបមាថា $x=\varphi(u,v)\ ,\ y=\psi(u,v)$

គណនា Jacobien $J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\Phi(u,v)$

គេបាន $\boxed{\iint_D f(x,y).dxdy=\iint_S f\left[\varphi(u,v);\psi(u,v)\right].|J|.dudv}$ ។

៩.កូអរដោនេប៉ូលែ :



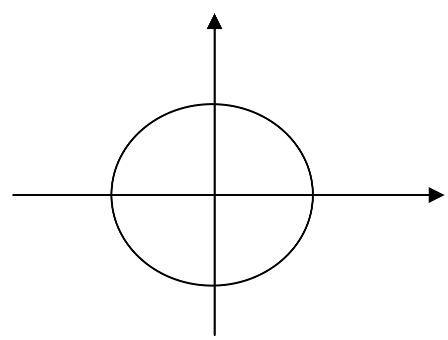
គេប្តូរអថេរ $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \end{cases}$

គេមាន $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

ដូចនេះ $\boxed{\iint\limits_D f(x,y).dxdy = \iint\limits_S f\left[r\cos\theta, r\sin\theta\right].rdrd\theta}$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាអាំងតេក្រាល $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}.dxdy$

ដែល $D = \left\{(x,y) / x^2 + y^2 = R^2\right\}$ ។



ក្នុងកូអរដោនេប៉ូលែគេបាន :

$$I = \iint\limits_S \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}.rdrd\theta$$

$$= \iint\limits_S r^2 drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi}{3}R^3$$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គណនា $I = \iint\limits_D xydxdy$

ដែល D កំនត់ដោយអក្ស័កូអរដោនេនៃ Astroide : $\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \quad (0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$

ឧទាហរណ៍៣ : គណនា $I = \iint\limits_D ydxdy$

ដែល D កំនត់ដោយអក្ស័អាប់ស៊ីស និងធ្នូរមួយនៃ Cycloid : $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$

ឧទាហរណ៍៤ : គណនា $I = \iint\limits_D xy^2 dxdy$

ដែល D កំនត់ដោយប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 2px$ និង បន្ទាត់ $x = p$ ។

IV-អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលឌុប :

ក.គណនាមាឌកំនត់ដោយផ្ទៃ $z = f(x,y)$ **និងប្លង់** $z = 0$ **ក្នុងដែន** D **លើ** (xoy)

$$\boxed{V = \iint_D f(x,y).dxdy}$$ ។

ខ.ផ្ទៃក្រលារបស់ដែន D **:**

$$\boxed{S = \iint_D dxdy}$$

គ.អនុវត្តន៍ក្នុងរូបវិទ្យា :

ឧបមាថា $\rho = \rho(x,y)$ ជាដង់ស៊ីតេនៃ Plaquette.

-ម៉ាសនៃ Plaquette. កំនត់ដោយ $m = \iint_S \rho.dS$

-ម៉ូម៉ង់ស្តាទិចធៀបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស $S_{ox} = \iint_S y.\rho(x,y).dxdy$

-ម៉ូម៉ង់ស្តាទិចធៀបនឹងអក្ស័អរដោនេ $S_{oy} = \iint_S x.\rho(x,y).dxdy$

-កូអរដោនេនៃទីប្រជុំទំងន់ :

$$x_0 = \frac{S_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y)dxdy \ , \ y_0 = \frac{S_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y).dxdy$$

-ម៉ូមង់ Inertie នឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស $I_x = \iint_S y^2\rho(x,y).dxdy$

-ម៉ូមង់ Inertie នឹងអក្ស័អរដោនេ $I_y = \iint_S x^2\rho(x,y).dxdy$

-ម៉ូមង់ Inertie នឹងគល់ O $I_O = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x,y).dxdy$ ។

ឧទាហរណ៏១

ចូរគណនាម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីសនៃបន្ទះលោហៈអូម៉ូហ្សែនមួយដែលកំនត់ដោយធ្នូរ ស៊ីក្លូអ៊ីត $x = a(t - \sin t)\ , y = a(1 - \cos t)$ និងអក្ស័ (OX) ?

ឧទាហរណ៏២ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃទីប្រជុំទំងន់នៃរូបកំនត់ដោយប៉ារ៉ាបូលពីរ :

$(P_1) : y^2 = 4x + 4$ and $(P_2) : y^2 = -2x + 4$ ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ចូរគណនា $I=\iint_D (3x^2+8xy+6y^2).dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/\ 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\ \}$

យើងបាន $I=\int_0^1 dx\int_1^2 (3x^2+8xy+6y^2).dy$

$$=\int_0^1 \left[3x^2y+4xy^2+2y^3\right]_1^2 dx$$

$$=\int_0^1 (6x^2+16x+16-3x^2-4x-2).dx$$

$$=\int_0^1 (3x^2+12x+14).dx=\left[x^3+6x^2+14x\right]_0^1=21$$

លំហាត់ទី២

ចូរគណនា $I=\iint_D (6x^2y+4y^3).dxdy$ ដែល $D=\left\{(x,y)/\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\ \right\}$

យើងបាន $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (6x^2y+4y^3)dy$

$$=\int_0^1 \left[3x^2y^2+y^4\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}.dx=\int_0^1 (3x^3+x^2-3x^6-x^8).dx$$

$$=\left[\frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^7}{7}-\frac{x^9}{9}\right]_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-\frac{3}{7}-\frac{1}{9}=\frac{127}{252}$$

លំហាត់ទី៣

ចូរគណនា $I=\iint_D (4x^3+2xy).dxdy$ ដែល $D=\left\{(x,y)/\ 0\le x\le \sqrt{y},\ 0\le y\le 4\right\}$

យើងបាន $I=\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{y}} (4x^3+2xy)dx$

$$=\int_0^4 \left[x^4+x^2y\right]_0^{\sqrt{y}} dy=\int_0^4 (y^2+y^2).dy=\left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^4=\frac{128}{3}$$

លំហាត់ទី៤

ចូរគណនា $I = \iint_D 4y^3 . dxdy$

ដែល $D = \{(x, y) / -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\}$

យើងបាន $I = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} 4y^3 dy = \int_{-2}^{2} [y^4]_{x^2}^{4} dx = \int_{-2}^{2} (256 - x^8) . dx = \left[256x - \frac{x^9}{9} \right]_{-2}^{2} = \frac{8192}{9}$

លំហាត់ទី៥

ចូរគណនា $I = \iint_D (6x^2 y + 4y^3) . dxdy$

ដែល $D = \{(x, y) / 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

យើងបាន $I = \int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (6x^2 y + 4y^3) dy$

$$= \int_{0}^{1} [3x^2 y^2 + y^4]_{x^2}^{\sqrt{x}} . dx = \int_{0}^{1} (3x^3 + x^2 - 3x^6 - x^8) . dx$$

$$= \left[\frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^7}{7} - \frac{x^9}{9} \right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} - \frac{1}{9} = \frac{127}{252}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

I.ចូរគណនាអាំងតេក្រាលឌុបខាងក្រោម :

១. $\int_0^2 dy\int_1^2 (x^2+2y).dx$

២. $\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$

៣. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$

៤. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_{a\sin\theta}^{a} rdr$

៥. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{3\cos\theta} r^3\sin^2\theta dr$

៦. $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^3}dy$

II.ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$ ដែល $D=\{(x,y)/x\ge 1, y\ge 1\ ,\ x+y\le 3\}$

III.គណនា $I=\iint_D \frac{ydxdy}{x^2+1}$ ដែល $D=\{(x,y)/x\ge 0, y\ge 0\ ,\ x^2+y^2\le 1\}$ ។

IV.គណនា $I=\iint_D x^2(y-x)dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/y=x^2\ ,\ x^2=y\}$ ។

V.គណនា $I=\iint_D \ln(x+y).dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/x=1, y=1\ ,\ y=x+1\}$ ។

VI.គណនា $I=\iint_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ដែល $D=\{(x,y)/y=2x\ ,\ x=2\}$ ។

VII.គណនា $I=\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}.dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/x=0, y=0\ ,\ x+y=1\}$ ។

VIII.គណនា $I=\iint_D (x^2+y^2+1).dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/\ ,\ x^2+y^2-x=0\}$

IX.គណនា $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}.dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/x^2+y^2=4, x^2+y^2=16\}$

X.គណនា $I=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}.dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/x^2+y^2\le 2\ ,\ y\ge 0\}$

XI.គណនា $I=\iint_D \sqrt{xy}.dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/(x^2+y^2)^2\le xy\}$

XII.គណនា $I=\iint_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}.dxdy$ ដែល $D=\{(x,y)/x\ge 0, y\ge 0, x^3+y^3\le 1\}$

អាំងតេក្រាលទ្រីប

I-អាំងតេក្រាលទ្រីបក្នុងកូអរដោនេចតុកោណកែង:

អាំងតេក្រាលទ្រីបនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)$ ក្នុងដែន V តាមនិយមន័យគឺជាលីមីតនៃផលបូក អាំងតេក្រាលទ្រីប ដែលត្រូវគ្នា :

$$\iiint_V f(x,y,z).dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_{ji} \to 0 \\ \max \Delta z_{ki} \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

ការគណនាអាំងតេក្រាលទ្រីប គឺជាការគណនាបន្តបន្ទាប់បីដងនៃអាំងតេក្រាលធម្មតា ឬជាការគណនាអាំងតេក្រាលឌុប និង អាំងតេក្រាលធម្មតា ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $I = \iiint_V x^3 y^2 z.dz$

ដែលដែន V កំនត់ដោយវិសមភាព $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ 0 \le z \le xy \end{cases}$ ។

គេបាន $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz = \int_0^1 dx \int_0^x \left[\frac{1}{2} x^3 y^2 z^2 \right]_0^{xy} dy$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{2} x^5 y^4 .dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{10} x^5 y^5 \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{1}{10} x^{10} dx = \frac{1}{110}$$ ។

II-លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលទ្រីប

1. $\iiint_V k.f(x,y,z)dxdydz = k.\iiint_V f(x,y,z).dxdydz$

2. $\iiint_V .f(x,y,z)dxdydz = .\iiint_{V_1} f(x,y,z).dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$

   ដែល $V = V_1 + V_2$ ។

3. $\iiint_V [f(x,y,z) + g(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f(x,y,z).dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$

III - ការប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលទ្រីប

ឧបមាថាមានអាំងតេក្រាលទ្រីប : $\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$

បណ្តូរអថេរពីកូអរដោនេ x,y,z ទៅកូអរដោនេ u,v,w ដែល $\begin{cases} x=\varphi(u,v,w) \\ y=\psi(u,v,w) \\ z=\phi(u,v,w) \end{cases}$

តាមរូបមន្ត :

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\left[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\phi(u,v,w)\right].|J|.dudvdw}$$

ដែល $Jacobien \ : J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ ។

1 - ករណីកូអរដោនេក្នុងតំរុយស៊ីឡាំង : (r, θ, h)

គេយក $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h$ ។

គេគណនា $Jacobien: \ J = r$. ដូចនេះគេបានរូបមន្តប្តូរអថេរក្នុងតម្រុយស៊ីឡាំង :

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, h\right).r\,dr\,d\theta\,dh}$$

2 - ករណីកូអរដោនេក្នុងតំរុយស្វ៊ែ (φ, ψ, r)

គេយក $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$

គេគណនា $Jacobien: \ J = r^2\cos\psi$. ដូចនេះគេបានរូបមន្តប្តូរអថេរក្នុងតម្រុយស្វ៊ែ :

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f\left(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\sin\varphi, r\sin\psi\right).r^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr}$$

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$

ដែល V ជាប៊ូលដែលមានកាំស្មើ R ។

ដោយប្រើកូអរដោនេស្វ៊ែ $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$

ដែល $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le R$ គេបាន ៖

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r.r^2\cos\psi.dr = \pi R^4$$ ។

IV -**អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលទ្រីប**

ក.មាឌរបស់ដែន V **ក្នុងតម្រុយដេកាត** $OXYZ$ **៖**

$$\boxed{V = \iiint_V dxdvdz}$$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ ចូរគណនាមាឌរបស់អេលីបសូអ៊ីត $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

ខ.មាឌរបស់អង្គធាតុកំនត់ដោយដែន V **មួយ ៖**

$M = \iiint_V \rho(x,y,z).dxdydz$ ដែល $\rho(x,y,z)$ ជាដង់ស៊ីតេអង្គធាតុត្រង់ចំនុច (x,y,z) ។

គ.ម៉ូម៉ង់ស្តាទិចនៃអង្គធាតុមួយធៀបនឹងអក្ស័កូអរដោនេ ៖

$$M_{XY} = \iiint_V \rho(x,y,z).z.dxdydz$$

$$M_{YZ} = \iiint_V \rho(x,y,z).x.dxdydz$$

$$M_{ZX} = \iiint_V \rho(x,y,z).y.dxdydz$$

ឃ.កូអរដោនេនៃទីប្រជុំទំងន់ ៖

$$G\left(\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M},\ \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}\right)$$

ង.ម៉ូម៉ង់និចលភាពធៀបនឹងអក្ស័កូអរដោនេ ៖

$$I_X = \iiint_V (y^2+z^2)\ \rho(x,y,z).z.dxdydz$$

$$I_Y = \iiint_V (z^2+x^2)\ \rho(x,y,z).x.dxdydz$$

$$I_Z = \iiint_V (x^2+y^2)\ \rho(x,y,z).y.dxdydz$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

I-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

1. $I=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1+x+y+z}}$

2. $I=\int_0^2 dx\int_0^{2\sqrt{x}} dy\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} xdz$

3. $I=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$

4. $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} xyz.dz$

II-ចូរគណនា $I=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$

III-ចូរគណនា $I=\int_0^{2r}\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$

IV-ចូរគណនា $I=\int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2).dz$

VI-ដោយប្រើកូអរដោនេស្វ៊ែ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលបីជាន់ខាងក្រោម ៖

$I=\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ ដែល V ជាដែនខាងក្នុងប៊ូលដែលមានសមីការ ៖

$x^2+y^2+z^2\le x$ ។

VIII-ចូរគណនា $I=\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ ដែល V ជាដែនកំនត់ដោយប្លង់នៃអក្ស័កូអរដោនេ និង ប្លង់មានសមីការ $x+y+z=1$ ។

IX-ចូរគណនា $I=\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$ ដែល V ជាដែនខាងក្នុងរបស់អេលីបសូអ៊ីត $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ។

X-ចូរគណនាមាឌរបស់ប៊ូល $x^2+y^2+z^2=R^2$ ។

អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោង

I-អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងនៃលំហាទីមួយ :

ឧបមាថាគេមាន $U = f(x,y)$ ជាអនុគមន៍មួយជាប់ ដែល $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ ។

-យើងជ្រើសរើស ប្រពន្ធ័មួយនៃចំនុច $M_i(x_i , y_i)$, $i = 1 , 2 , 3 ,....,n$ ដោយចែកក្រាប (c): $y = \varphi(x)$ ជាធ្នូរស្មើៗគ្នា $M_{i-1}M_i = \Delta S_i$ ។

-បង្កើតផលបូកអាំងតេក្រាល $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i , y_i).\Delta S_i$ ។

-លីមីតនៃផលបូកនេះកាលណា $n \to +\infty$ ជាមួយនឹង $\max \Delta S_i \to 0$ តាមនិយមន័យ ហៅថាអាំងតេក្រាល Curviligne នៃលំហាទីមួយ ។

គេកំនត់សរសេរ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i = \int_C f(x,y).ds$ ។

ដែល ds ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃធ្នូរ ដែល $ds = \sqrt{1 + y'^2}.dx$ ។

-ដូចនេះគេបានរូបមន្ត $\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f[x, \varphi(x)].\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}.dx$ ។

-ក្នុងករណីដែល $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ នោះគេបានរូបមន្ត :

$$\int_C f(x,y).ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)].\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}.dt$$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល Curviligne $I = \int_C (x + y).ds$

ដែល C ជាកុងទួរនៃត្រីកោណ ABO មានកំពូល $A(1,0)$, $B(0,1)$,$O(0,0)$ ។

II-អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងនៃលំហាទីពីរ :

ឧបមាថាគេមាន $P(x,y)$ និង $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍មួយជាប់ និង $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ ជាក្រាប(C) មួយ ។

អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងនៃលំហទីពីរកំណត់ដោយ :

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + \varphi'(x).Q\big(x,\varphi(x)\big)\right].dx}$$

-ករណីដែលក្រាប (C) ឱ្យដោយទម្រង់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ដែល $\alpha \le t \le \beta$

គេបានរូបមន្ត :

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P\big(\varphi(t),\psi(t)\big).\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big).\psi'(t)\right].dt}$$

ឧទាហរណ៍ : គណនា $I = \int_C y^2dx + x^2dy$ ដែល C ជាកន្លះអេលីបខាងលើមានសមីការ

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ ។

គេបាន $I = \int_C y^2dx + x^2dy = \int_\pi^0 \left[b^2\sin^2 t.(-a\sin t) + a^2\cos^2 t.(b\cos t)\right].dt$

$$= -ab^2\int_\pi^0 \sin^3 t.dt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t.dt = \frac{4}{3}ab^2$$ ។

III-អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

រូបមន្តញូតុន-ឡិបនិច :

បើកន្សោម $P(x,y).dx + Q(x,y).dy$ ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

នៃអនុគមន៍កំនត់ដោយ $U = f(x,y)$ ដែល $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ

ខ្សែកោង (L) ពីចំនុច $M_1(x_1, y_1)$ ទៅចំនុច $M_2(x_2, y_2)$ នោះគេបាន :

$$\int_{(L)} P(x,y).dx + Q(x,y).dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y).dx + Q(x,y).dy$$

$$= U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1)$$

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងខាងក្រោម :

$$I = \int_{(MN)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4).dy$$

ដែល $M(-2,-1)$, $N(3,0)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

I-ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1. $I=\int_{(0,1)}^{(1,2)}(4x^3+2xy^2)dx+(2x^2y+4y^3)dy$

2. $I=\int_{(1,0)}^{(2,3)}(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy$

3. $I=\int_{(0,\frac{\pi}{2})}^{(\frac{\pi}{2},\pi)}(\sin 2x+\cos x\sin y)dx+(\sin x\cos y+\sin 2y)dy$

4. $I=\int_{(2,1)}^{(1,3)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$

5. $\int_{(1,1)}^{(3,5)}\frac{2x}{x^2+y^2}dx+\frac{2y}{x^2+y^2}dy$

II-ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

1. $I=\int_C(x^2-2xy)dx+(2xy+4y^2)dy$ ដែល $(C):y=x^2\ ,\ 1\le x\le 2$ ។

2. $I=\int_C(4x^3-8x^2y)dx+(6xy^2-8y^3)dy$ ដែល $y=x\ ,\ 2\le x\le 4$ ។

3. $I=\int_{AB}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$ ដែល AB ជាធ្នូរនៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ដែលភ្ជាប់ពីចំនុច $A(1,1)$ ទៅ $B(2,4)$ ។

III-ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_C xdx+ydy$ ដែល C ជារង្វង់ $x^2+y^2=R^2$ ។

IV-ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_C\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ ដែល C ជាបន្ទាត់ភ្ជាប់ពី $O(0,0)$ ទៅចំនុច $A(1,2)$ ។

V-គណនា $I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(4x^3+6x^2y+6xy^2-4y^3)dx+(2x^3+6x^2y-12xy^2+8y^3)dy$ ។

SERIES

I-សញ្ញាណគ្រឹះ

ឧបមាថាមានស៊េរីលេខ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ (1)

-គេថាស៊េរី (1) ជាស៊េរីបង្រួមកាលណាផលបូកដោយឡែក $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ មានលីមីតកំនត់មួយកាលណា $n \to +\infty$ ។

-ចំនួន $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ ហៅថាផលបូកនៃស៊េរី ។

-ចំនួន $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ ហៅថាសំណល់នៃស៊េរី ។

-ប្រសិនបើ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ វាមិនមាន ឬ មិនកំនត់នោះគេថាស៊េរី (1) ជាស៊េរីពង្រីក ។

សំគាល់ :

-បើស៊េរី (1) ជាស៊េរីបង្រួមនោះគេមាន $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ។

-ច្រាស់មកវិញបើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ នោះស៊េរី (1) មិនអាចជាស៊េរីបង្រួមជានិច្ចទេ ។

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថាស៊េរី $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ ជាស៊េរីបង្រួម ។

II-លក្ខណៈបង្រួម ឬពង្រីកនៃស៊េរីដែលមានតួវិជ្ជមាន :

ក.លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យប្រៀបធៀប :

ឧបមាថាមានស៊េរីលេខ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)$ (1)

និង $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n)$ (2)

ដែល $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n = n_0$ ។

-បើស៊េរី (2) ជាស៊េរីបង្រួមនោះស៊េរី (1) ក៏ជាស៊េរីបង្រួមដែរ ។

-បើស៊េរី (1) ជាស៊េរីពង្រីកនោះស៊េរី (2) ក៏ជាស៊េរីពង្រីកដែរ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរសិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{4n^2-1})$ និង $\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

៦.លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យប្រៀបធៀបក្នុងទម្រង់លីមីត :

ឧបមាថាមានស៊េរីពីរដែលមានតួវិជ្ជមាន $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n)$

ដើម្បីសិក្សាគេគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=t$

បើតម្លៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=t>0$ នោះគេថាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n)$ មានភាពរួម ឬ

មានភាពរីកដូចគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ :សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n-n}=\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+....+\frac{1}{2^n-n}+.....$

យើងមាន $\frac{1}{2^n-n}>\frac{1}{2^n}$ ។

តាង $a_n=\frac{1}{2^n-n}$, $b_n=\frac{1}{2^n}$ គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=1$

ដោយស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ មានផលបូកដោយឡែក $S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$

ឬ $S_n=\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{2^n}\right)=1-\frac{1}{2^n}\to1$ កាលណា $n\to+\infty$ នោះ ស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

ជាស៊េរីបង្រួម ។

ដូចនេះស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n-n}=\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+....+\frac{1}{2^n-n}+.....$ ជាស៊េរីបង្រួមដែរ ។

ឥ.ស៊េរីធរណីមាត្រ និង ស៊េរីអាម៉ូនិច :

☞ **ស៊េរីធរណីមាត្រ :**

ឧបមាថាមានស៊េរី $a+a.q+a.q^2+a.q^3+.....+a.q^n+....=\sum_{n=1}^{+\infty}(a.q^n)$,$a\neq0$

-ស៊េរីនេះជាស៊េរីកុងវែហ្សង់កាលណា $|q|<1$

-ស៊េរីនេះជាស៊េរីឌីវែហ្សង់កាលណា $|q|\geq1$

ឧទាហរណ៍ : សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+....+\left(\frac{2}{3}\right)^n+....$

☞ **ស៊េរីអាម៉ូនិច :**

ស៊េរីអាម៉ូនិច $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+....=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n})$ ជាស៊េរីឌីវែហ្សង់ ។

ឧទាហរណ៍ :

1. បង្ហាញថា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+.......+\frac{1}{n.2^n}+.....$ ជាស៊េរីបង្រួម ?

2. បង្ហាញថា $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+......+\frac{\ln n}{n}+......$ ជាស៊េរីពង្រីក ?

ឃ -លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យរបស់អាឡាំបែរ $(\textit{ALEMBERT})$ **:**

ឧបមាថាមានស៊េរី $a_1+a_2+a_3+....+a_n+.....=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ (1) , $a_n>0$

ដើម្បីសិក្សាស៊េរីនេះគេត្រូវគណនាលីមីត $q=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

-បើ $q<1$ នោះស៊េរី (1) ជាស៊េរីបង្រួម

-បើ $q>1$ នោះស៊េរី (1) ជាស៊េរីពង្រីក

-បើ $q=1$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន

ឧទាហរណ៍:

ចូរសិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{e^{2n-1}}\right)=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^3}+\frac{3}{e^5}+.......+\frac{2n-1}{e^{2n-1}}+....$?

ង.លក្ខណៈវិនិច្ឆ័យរបស់កូស៊ី

ឧបមាថាមានស៊េរី $a_1+a_2+a_3+....+a_n+.....=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ (1) , $a_n>0$

ដើម្បីសិក្សាគេត្រូវគណនាលីមីត $q=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$

-បើ $q<1$ នោះស៊េរី (1) ជាស៊េរីបង្រួម

-បើ $q>1$ នោះស៊េរី (1) ជាស៊េរីពង្រីក

-បើ $q=1$ នោះគេមិនអាចសន្និដ្ឋានបាន

ឧទាហរណ៍ ៖

សិក្សាស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+.....+\left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2}+....$

ច.លក្ខណៈប្រៀបធៀបជាមួយអាំងតេក្រាល

ឧបមាថាមានស៊េរី $a_1+a_2+a_3+....+a_n+.....=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)$ (1) , $a_n>0$

ប្រសិនបើ $a_n=f(n)$ ដែលអនុគមន៍ $f(x)$ វិជ្ជមាន-ម៉ូណូតូនចុះ និងជាប់

ចំពោះ $\forall x\geq a\geq 1$ ។

ដូចនេះស៊េរី (1) និងអាំងតេក្រាល $\int_a^{+\infty}f(x).dx$ កុងវែរសង់ ឬ ឌីវែរសង់ព្រមគ្នា ។

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរសិក្សាស៊េរី *Dirichlet* $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n^p})$?

III-**<u>ស៊េរីរបស់តៃល័រ</u>** ៖

ក.ពន្លាតអនុគមន៍មួយជាស៊េរីគត់ ៖

-ប្រសិនបើអនុគមន៍ $f(x)$ មានក្នុងវិស័សីណា $|x-a|<R$ នៃចំនុច a ។

គេថាពន្លាតជាស៊េរីគត់នៃស្វ័យគុណរបស់ $(x-a)$ ក្រោមទម្រង់ ៖

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+....$$

ហៅថាជាពន្លាតស៊េរីតៃល័រ ។

-បើ $a=0$ នោះគេបានពន្លាតរបស់ម៉ាក់ឡូរាំង ៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+....+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+....$$

-សមភាពតៃល័រ

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+....$$

វាពិតចំពោះ $|x-a|<R$ ដែលសំណល់ $R=f(x)-\left[f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k\right]\to 0$

កាលណា $n\to+\infty$ ។

ឧទាហរណ៏ ៖

1.ចូរពន្លាតអនុគមន៏ $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ តាមពន្លាតតៃលរ័ត្រង់ចំនុច $x=1$?

2. ចូរពន្លាតអនុគមន៏ $f(x)=\ln(1+x)$ តាមពន្លាតម៉ាក់ឡូរាំង ?

៩.រូបមន្តពន្លាតអនុគមន៏សំខាន់ៗ ៖

1. $e^{x}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+.......+\dfrac{x^n}{n!}+................$

2. $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-......+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...........$

3. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-..........+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+...........$

ត.អនុវត្តន៏សើរក្នុងដំណោះស្រាយបញ្ហាមួយចំនួន

1.គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cos x}{x^6}$

2. គណនាអាំងតេក្រាល ខាងក្រោមយកតម្លៃប្រហែលត្រឹម $\dfrac{1}{1000}$

ក.$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$

ខ. $I=\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^x-1}{x}$

3. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអឺលែ $\cos x+i.\sin x=e^{ix}$, $x\in IR$,$i^2=-1$

4. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+......+\dfrac{1}{n!}\right)$

5. ដោយមិនពន្លាតចូរកំនត់រកលេខមេគុណមុខតួ x^3 របស់ $(x^2-x+1)^{2007}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

I-ចូរសិក្សាភាពរីក ឬ រួមនៃស៊េរីខាងក្រោមនេះ :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2n-1}{10^n}\right]$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{n+1}{7^{2n-1}}\right]$

II-ចូរសិក្សាភាពរីក ឬ រួមនៃស៊េរីខាងក្រោមនេះ :

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+......+\frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}+.....$

2. $\frac{2}{1}+\frac{2.5}{1.5}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+.........+\frac{2.5.8......(3n-1)}{1.5.9.....(4n-3)}$

3. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{n!}+......$

4. $\frac{3}{2^2.3^2}+\frac{5}{3^2.4^2}+\frac{7}{4^2.5^2}+.........+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+.....$

5. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+......+\frac{1}{(3n-1)^2}+........$

II-ចូរបង្ហាញថាស៊េរី $\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right)\right]$ ជាស៊េរីបង្រួម ។

III-ចូរសិក្សាស៊េរីខាងក្រោម :

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10^k}{k!}\right)$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k!}{2007^k}\right)$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}\right)$

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)\right]$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ln(1+x^{2^n})\right], |x|<1$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{10^k}\right)$

IV-ចូរពន្លាតអនុគមន៍ខាងក្រោមតាម ម៉ាក់ឡូរាំង

1. $f(x)=\frac{1}{1-x}$

2. $f(x)=\tan x$

3. $f(x)=\ln(1+x)$

4. $\mathrm{f(x)=chx}$

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

I-និយមន័យ

ក.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (Differential Equationns)

សមីការដែលមានទម្រង់ $F(x,y,y',y'',y''',.....,y^{(n)})=0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី n ។

ឧទាហរណ៍ : $y''-x^2y'+2\sin x-3=0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ ។

ខ.ចម្លើយរបស់សមីការ

អនុគមន៍ $y=\varphi(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $F(x,y,y',y'',y''',.....,y^{(n)})=0$ ហៅថាចម្លើយរបស់សមីការ ។

ឧទាហរណ៍ : អនុគមន៍ $y=\sin x$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ $y''+y=0$

ពីព្រោះ $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$ នាំឱ្យ $y''+y=-\sin x+\sin x=0$ ពិត ។

សំគាល់ : ចម្លើយរបស់សមីការ $F(x,y,y',y'',y''',.....,y^{(n)})=0$ អាចមានទម្រង់ $\phi(x,y,C)=0$, $C:\text{constance}$ ហៅថាចម្លើយទម្រង់អាំព្លីស៊ីត ។

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $3x^2+xy+y^3+1=0$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $(E):(3y^2+x)y'+6x+y=0$?

II-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ

(First Order Differential Equationns)

ក.និយមន័យ

សមីការដែលមានទម្រង់ $F(x,y,y')=0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១.

ឧទាហរណ៍ : $y'+2xy^2-4x^3=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ ។

៩.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអថេរផ្តាច់

(Separable Equationns)

-សមីការដែលមានទម្រង់ $f(x).dx = g(y).dy$ ហៅថាសមីការអថេរផ្តាច់ ។

-ដំណោះស្រាយសមីការ $f(x)dx = g(y)dy$

គេទាញបាន $\int f(x).dx = \int g(y).dy$

នាំអោយ $F(x) = G(y) + C$, $C \in IR$ ។

ឧទាហរណ៍ :

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{2x}{x^2+1}dx = e^y dy$

គេបាន $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int e^y dy$

$\ln(x^2+1) = e^y + C$ ឬ $y = \ln|\ln(x^2+1) - C|$, $C \in IR$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = (4y^3 - 9y^2 + 4y)dy$

គេបាន $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.dx = \int (4y^3 - 9y^2 + 4y)dy$

$\sqrt{1+x^2} = y^4 - 3y^3 + 2y^2 + C$

ដូចនេះ $y^4 - 3y^3 + 2y^2 - \sqrt{1+x^2} + C = 0$ ។

3. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\tan x + \cot x)^2.dx = (\sin y + \cos y)^2 dy$

គេមាន $\begin{cases} (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + 2 + \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \\ (\sin y + \cos y)^2 = \sin^2 y + 2\sin y \cos y + \cos^2 y = 1 + \sin 2y \end{cases}$

គេបាន $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x})dx = \int (1 + \sin 2y)dy$

$\tan x - \cot x = y - \frac{1}{2}\cos 2y + C$

ដូចនេះ $y - \frac{1}{2}\cos 2y - \tan x + \cot x + C = 0$ ដែល $C \in IR$ ។

គ.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែនលំដាប់ទីមួយ

-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (E) ជាសមីការអូម៉ូសែន កាលណាអនុគមន៍ $P(x,y)$ និង $Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូសែនដែលមានដឺក្រេស្មើគ្នា ។

-សមីការ (E) ជាទូទៅគេអាចសរសេរជាទម្រង់ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (E_1)

-ដើម្បីរកចម្លើយរបស់សមីការនេះគេត្រូវតាងអនុគមន៍ $y = u.x \Rightarrow y' = u + u'.x$

សមីការ (E_1) អាចសរសេរ $u + u'x = f(u)$ ដោយ $u' = \frac{du}{dx}$

គេបាន $u + x\frac{du}{dx} = f(u)$ នាំឱ្យ $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ដែល $C \in IR$ ។

ឧទាហរណ៏ :

ដោះស្រាយសមីការ $(x^2 + 2xy + 3y^2)dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$

គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{x^2 + 2xy}$ ដោយតាង $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + u'x$

គេបាន $u + u'x = \frac{x^2 + 2x^2u + 3u^2x^2}{x^2 + 2x^2u} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u}$ ដោយ $u' = \frac{du}{dx}$

គេបាន $u + x\frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u}$ ឬ $x\frac{du}{dx} = \frac{1 + 2u + 3u^2}{1 + 2u} - u = \frac{1 + u + u^2}{1 + 2u}$

នាំឱ្យ $\frac{2u + 1}{u^2 + u + 1}du = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{2u + 1}{u^2 + u + 1}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u^2 + u + 1| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$$

គេទាញ $u^2 + u + 1 = Cx$ តែ $y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}$

គេបាន $\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1 = Cx$ នាំឱ្យ $(C - 1)x^2 - xy - y^2 = 0$,$C \in IR$ ។

ឃ.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

- បើ $\det=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវតាង $U=ax+by$ ។

-បើ $\det=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b\neq 0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវតាង $x=X+x_0\ ,\ y=Y+y_0$

សមីការអាចសរសេរ $Y'=f\left(\dfrac{a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c}{a'(X+x_0)+b'(Y+y_0)+c'}\right)$

ឬ $Y'=f\left(\dfrac{aX+bY+(ax_0+by_0+c)}{a'X+b'Y+(a'x_0+b'y_0+c')}\right)$

បើ $\begin{cases} ax_0+by_0+c=0 \\ a'x_0+b'y_0+c'=0 \end{cases}$ នោះគេអាចរកឃើញតម្លៃ x_0 និង y_0

ក្នុងករណីនេះសមីការក្លាយជា $Y'=f\left(\dfrac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$

ដោយតាង $Y=U.X\Rightarrow Y'=U+U'.X$ នោះសមីការអាចសរសេរ :

$U+U'.X=f\left(\dfrac{aX+bU.X}{a'X+b'U.x}\right)=f\left(\dfrac{a+bU}{a'+b'U}\right)$ ដោយ $U'=\dfrac{dU}{dX}$

គេបាន $U+X.\dfrac{dU}{dX}=f\left(\dfrac{a+bU}{a'+b'U}\right)$ ឬ $\dfrac{dU}{f\left(\dfrac{a+bU}{a'+b'U}\right)-U}=\dfrac{dX}{X}$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

1. $y'=\dfrac{x+2y+4}{2x+4y+1}$
2. $y'=\dfrac{4x-2y+3}{2x-y+1}$
3. $y'=\dfrac{2x-y-1}{x+y-5}$
4. $y'=\dfrac{x+y-6}{x-y+2}$

ង.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $(E):\ y'+P(x).y=Q(x)$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

-គុណអង្គទាំងពីរ នឹង $e^{\int P(x).dx}$ គេបាន :

$$y'e^{\int P(x).dx}+P(x)ye^{\int P(x).dx}=Q(x).\int e^{P(x).dx}$$

-តាងអនុគមន៍ $U=ye^{\int P(x).dx}\Rightarrow U'=y'e^{\int P(x).dx}+P(x)ye^{\int P(x).dx}$

គេបាន $U'=Q(x).e^{\int P(x).dx}$ នាំឱ្យ $U=\int\left[Q(x)e^{\int P(x).dx}\right].dx+C\ ,\ C\in IR$

-គេទាញ $ye^{\int P(x).dx}=\int\left[Q(x)e^{\int P(x).dx}\right]dx+C$

ដូចនេះ $y=e^{-\int P(x)dx}\int\left[Q(x)e^{\int P(x).dx}\right]dx+Ce^{-\int P(x).dx}$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

1. $y'+2xy=e^{-x^2}\sin x$

2. $y'+\frac{1}{x}y=3x^2$

3. $y'+3x^2=\frac{xe^{-x^3}}{\sqrt{1+x^4}}$

ច.សមីការឌីប៊ែនូយី $(E):\ y'+P(x).y=Q(x).y^{\alpha}\ ,\ \alpha\in IR$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

-ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង y^{α} គេបាន $y'y^{-\alpha}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$

-តាង $U=y^{1-\alpha}\Rightarrow U'=(1-\alpha)y'y^{-\alpha}$ ឬ $y'y^{-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}U'\ ,\ \alpha\neq 1$

សមីការអាចសរសេរ $\frac{1}{1-\alpha}U'+P(x).U=Q(x)$

នាំឱ្យ $U'+(1-\alpha)P(x).U=(1-\alpha)Q(x)$ ជាសមីការអាចដោះស្រាយបាន ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $y'-2x^3y=\frac{4xy^3}{(1+x^2)^2}$ ។

ឈ.សមីការរីកកាទី (Riccati Equations)

សមីការដែលមានរាង $y'=u(x)y^2+v(x)y+w(x)$ ហៅថា Riccati Equations.

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចតទៅ :

-រកអនុគមន៏ $\bar{y}$ ជាចម្លើយដោយឡែករបស់វា

-តាង $y=\bar{y}+\dfrac{1}{z}$ ដែល $z\neq 0$ ជាអនុគមន៏ត្រូវរកតាមសមីការលីនេអ៊ែមួយ ។

ញ.សមីការក្លែរ៉ូ (Clairaut Equations)

សមីការដែលមានរាង $y=xy'+f(y')$ ហៅថាសមីការក្លែរ៉ូ

ដើម្បីដោះស្រាយរកចម្លើយសមីការនេះគេត្រូវតាង $y'=\dfrac{dy}{dx}=t$ ។

III -<u>សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ</u>

(Second Order Differential Equationns)

ក.និយមន័យ

សមីការដែលមានទម្រង់ $F(x,y,y',y'')=0$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី2.

ឧទាហរណ៏ : $y''-(x+1)y'+2xy^2-4x^3=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ ។

ខ.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទីពីរ

សមីការទម្រង់ (E) $ay''+by'+cy=f(x)$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែ

ដែល $a\neq 0, a, b, c$ ជាចំនួនពិតថេរ ។

a / បើអនុគមន៏ $f(x)=0$ នោះសមីការក្លាយទៅជា :

$$ay''+by'+cy=0\ ,\ a\neq 0\ ,\ a,b,c\in IR$$

សមីការនេះគេហៅថាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ ។

-សមីការសំគាល់ :

សមីការសំគាល់របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay''+by'+cy=0\ ,a\neq 0,a,b,c\in IR$

ជាសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានរាង $ar^2+br+c=0$ ។

-ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

ដើម្បីរកចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay''+by'+cy=0$ $,a\neq 0,a,b,c\in IR$

គេត្រូវដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $ar^2+br+c=0$ ។

-បើ $\Delta=b^2-4ac>0$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសពីរ r_1 និង r_2

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ :

$y=f(x)=A.e^{r_1x}+B.e^{r_2x}$ ដែល $A,B\in IR$ ។

-បើ $\Delta=b^2-4ac=0$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសឌុប $r_1=r_2=-\dfrac{b}{2a}=r_0$

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ :

$y=f(x)=(Ax+B).e^{r_0x}$ ដែល $A,B\in IR$ ។

-បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ នោះសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនកំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$r_1=\alpha+i\beta$ និង $r_2=\alpha-i\beta$ ។

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$y=f(x)=(A\cos\beta x+B\sin\beta x).e^{\alpha x}$ ដែល $A,B\in IR$ ។

b/ បើអនុគមន៍ $f(x)\neq 0$ នោះគេបាន (E) $ay''+by'+cy=f(x)$

សមីការនេះគេហៅថាជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ ។

ដើម្បីរកចម្លើយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចតទៅ :

-រកចម្លើយពិសេស $\overline{y}$ មួយរបស់សមីការ

-គេបាន $ay''+by'+cy=f(x)$ (1) និង $a\overline{y}''+b\overline{y}'+c\overline{y}=f(x)$ (2)

-ដកសមីការ (1) & (2) គេបាន $a(y''-\overline{y}'')+b(y'-\overline{y}')+c(y-\overline{y})=0$

-តាង $Z=y-\overline{y}$ គេបាន $az''+bz'+cz=0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

លីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរ ។

IV-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប និងហ្វាក់ទ័រអាំងតេក្រាល

ក.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប

ឧបមាថាមានសមីការ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1)

បើគេមាន $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ នោះសមីការ (1) អាចសរសេរក្រោមទម្រង់ :

$dU(x,y) = 0$ ដែលគេហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប ។

ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (1) គឺជាអនុគមន៍ $U(x,y) = C$, $C \in IR$ ។

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

2. $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$

3. $(4x^3 + 3x^2y^2 + 2xy^3)dx + (2x^3y + 3x^2y^2 + 8y^3)dy = 0$

ខ.ហ្វាក់ទ័រអាំងតេក្រាល

ឧបមាថាមានសមីការ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ (1)

បើគេមាន $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ នោះគេនឹងអាចរកអនុគមន៍ $\mu = \mu(x,y)$ មួយដែល

កំនត់ឱ្យ $\mu(x,y)[P(x,y)dx + Q(x,y)dy] = dU$ គេថា $\mu = \mu(x,y)$ ជាហ្វាក់ទ័រអាំង-

តេក្រាល ដែលកំនត់ឱ្យ $\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)P(x,y)] = \dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)Q(x,y)]$ ។

ចំពោះអនុគមន៍ $\mu = \mu(x,y)$ គេអាចរកតាមពីរករណី :

1. $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\right) = F(x)$ នោះ $\mu = \mu(x)$

2. $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\right) = G(y)$ នោះ $\mu = \mu(y)$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$?

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

1. $y'+2xy = x^3$
2. $y'-\dfrac{2x-1}{x^2}y = 1$
3. $y'+y\cos x = \sin x\cos x$
4. $xy'+y = xy^2\ln x$
5. $y+y' = \cos x$
6. $y''-2y'+2y = 8x^2$
7. $y''-2y'+y = e^{3x}$
8. $y''+y'-2y = \sin 2x$
9. $y''+4y = (2x+3)e^x$
10. $y''-y = e^{2x}\cos x$

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

1. $y' = \dfrac{x+3y}{2x+6y+5}$
2. $y' = \dfrac{3x+2y-7}{x+y-3}$
3. $(x+y)dx+(x+2y)dy = 0$
4. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy = 0$
5. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$
6. $y''-y = 2x\sin x$
7. $y''-4y = e^{2x}\sin 2x$
8. $y''+4y = 2\sin 2x-3\cos 3x$
9. $y'' = xe^x+y$
10. $y''-9y = x(1+e^x)$

៣. ដោះស្រាយសមីការ

1. $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx = \dfrac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}$
2. $\dfrac{dx}{x^4+1} = e^y(\sin y+\cos y)^2.dy$
3. $(2x+1)(1+y^5)^2dx = y^4\sqrt{x^2+x+4}dy$
4. $x^7\sqrt{1+y^4}dx = y^3(1+x^4)dy$
5. $y\sqrt{\tan x}dx = dy$

ម៉ាទ្រីស
(MATRICES)

1. វ៉ិចទ័រ :

និយមន័យ : សំណុំមួយមាន n ចំនួនពិតរៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ $a_1, a_2, ..., a_n$ ហៅថាវ៉ិចទ័រ n ឌីម៉ង់ស្យុងដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \text{ ឬ } A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$ ដែល a_i ហៅថាកុំប៉ូហ្សង់ទី i ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A = (25, 35, 45, 75, 125, 225)$ ជាវ៉ិចទ័រមាន 6 ឌីម៉ង់ស្យុង ។

2. និយមន័យម៉ាទ្រីស

តារាងមួយដែលមាន m វ៉ិចទ័រ និង n ឌីម៉ង់ស្យុងកំនត់សរសេរក្នុងវង់ក្រចកជារាង :

$$A = (a_{ij})_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ហៅថាម៉ាទ្រីសលំដាប់ m.n ។

m: ហៅថាចំនួនលីញ , n: ហៅថាចំនួនកូឡោន និង a_{ij} ជាធាតុនៅលើលីញទី i កូឡោនទី j ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A=\begin{pmatrix}2&5&3\\1&6&4\\7&2&1\\4&1&9\\3&8&7\end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 5×3 ។

3. ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស

a / Zero matrix :

ម៉ាទ្រីសទាំងអស់ដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យ ហៅថាម៉ាទ្រីសសូន្យ តាងដោយ O_{mn} ។

ឧទាហរណ៍ $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសសូន្យលំដាប់ 5×4 ។

b / Square matrix :

ម៉ាទ្រីសមួយដែលមានចំនួនលីញស្មើនឹងចំនួនកូឡោនហៅថា **ម៉ាទ្រីសការេ**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $A=(a_{ij})_{nn}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&.....&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&.....&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&.....&a_{3n}\\--&--&--&--&--\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&.....&a_{nn}\end{pmatrix}$

ឧទាហរណ៍ $A=\begin{pmatrix}2&7&3&0\\3&0&4&2\\1&2&5&4\\4&8&1&3\end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសការេ ។

c / Triangular matrix :

ម៉ាទ្រីសការេមួយដែលមានធាតុ $a_{ij}=0\,,\forall i>j \text{ or } i<j$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសត្រីកោណ**

ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$A=(a_{ij})_{nn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ ។

d / Diagonal matrix :

ម៉ាទ្រីសការេមួយដែលមានធាតុ $a_{ij}=0$, $\forall\, i\neq j$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $A=(a_{ij})_{nn}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ..... & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ។

e / Indentity matrix :

ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដែលមានធាតុ $a_{ii}=0$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសឯកតា**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $I_n=(a_{ij})_{nn}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ..... & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & ..... & 1 \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ $I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

f / Transpose of matrix :

ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})_{mn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលតាងដោយ $A^T=(a_{ji})_{nm}$ ។

ឧទាហរណ៍ បើ $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\\4&7\end{pmatrix}$ នាំឱ្យ $A^T=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&5&7\end{pmatrix}$ ។

g / Equality of matrix :

ម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})_{mn}$ និង $B=(b_{ij})_{mn}$ ជាម៉ទ្រីសពីរស្មើគ្នាកាលណាធាតុ $a_{ij}=b_{ij}$ ។

គេឱ្យម៉ាទ្រីសពីរ $A=\begin{pmatrix}3a+1&4b+5&2c+3\\2x-3&y+2&3z-2\end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix}7&9&9\\5&8&10\end{pmatrix}$

កំនត់ចំនួនពិត a,b,c,x,y និង z ដើម្បីឱ្យ $A=B$

គេបាន $A=B$ កាលណា $\begin{cases}3a+1=7\\4b+5=9\\2c+3=9\\2x-3=5\\y+2=8\\3z-2=10\end{cases}$ នាំឱ្យ

$a=2,b=1,c=3,x=4,y=6,z=4$

4. ប្រមាណវិធីនៃម៉ាទ្រីស

a / Addition of matrices :

-ម៉ាទ្រីសពីរអាចបូក ឬ ដកគ្នាបាន កាលណាវាជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ដូចគ្នា ។

-សន្មតថាគេមានម៉ាទ្រីសពីរ $A=(a_{ij})_{mn}$ និង $B=(b_{ij})_{mn}$

គេបានរូបមន្តផលបូក $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mn}$ និងផលដក $A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{mn}$

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}17 & 11 & 95\\ 34 & 25 & 57\\ 68 & 71 & 75\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}23 & 10 & 83\\ 21 & 14 & 35\\ 15 & 50 & 46\end{pmatrix}$

គេបាន $A+B=\begin{pmatrix}17+23 & 11+10 & 95+83\\ 34+21 & 25+14 & 57+35\\ 68+15 & 71+50 & 75+46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40 & 21 & 188\\ 55 & 36 & 92\\ 83 & 121 & 121\end{pmatrix}$

និង $A-B=\begin{pmatrix}17-23 & 11-10 & 95-83\\ 34-21 & 25-14 & 57-35\\ 68-15 & 71-50 & 75-46\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 12\\ 13 & 11 & 22\\ 53 & 21 & 29\end{pmatrix}$

b / Scalair multiplication;

ផលគុណ ម៉ាទ្រីស $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ នឹងចំនួនថេរ λ គឺជាម៉ាទ្រីសកំនត់ដោយ

$\lambda.A=\left(\lambda.a_{ij}\right)$

ឧទាហរណ៍ : បើ $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 7\\ 7 & 4 & 6\end{pmatrix}$ គេបាន $7A=\begin{pmatrix}35 & 21 & 28\\ 28 & 63 & 49\\ 49 & 28 & 42\end{pmatrix}$ ។

c / Multiplication of matrices:

ម៉ាទ្រីសពីរអាចគុណគ្នាបានលុះត្រាតែម៉ាទ្រីទីមួយមានចំនួនកូឡោនស្មើនឹងចំនួនលីញនៃម៉ាទ្រីសទីពីរ ។ ឧបមាថាគេមានម៉ាទ្រីសពីរ : $A=\left(a_{ij}\right)_{mn}$ និង $B=\left(b_{ij}\right)_{np}$

ផលគុណម៉ាទ្រីស A និង B គឺជាម៉ាទ្រីស C កំនត់ដោយ $C=A.B=\left(c_{ij}\right)_{mp}$

ដែល $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.b_{kj}\right)=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+.....+a_{in}b_{nj}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 9\\ 1 & 5 & 4\\ 2 & 7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

គេបាន $C = A.B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1+2.2+9.3 & 4.3++2.4+9.5 \\ 1.1+5.2+4.3 & 1.3+5.4+4.5 \\ 2.1+7.2+3.3 & 2.3+7.4+3.5 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $C = \begin{pmatrix} 35 & 65 \\ 23 & 43 \\ 25 & 49 \end{pmatrix}$ ។

d / Powers of matrices:

បើ $A = \left(a_{ij} \right)_{nn}$ ជាម៉ាទ្រីសការេនោះគេកំនត់ស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីសដោយ :

1. $A^2 = A.A$, $A^3 = A^2.A$, $A^4 = A^3.A$, ..., $A^p = A^{p-1}.A$, $p \in IN^*, P \geq 2$

2. $A^n.A^p = A^{n+p}$

3. $\left(A^n\right)^p = A^{np}$

4. $A^0 = I_n$ ដែល I_n ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ចូរគណនា A^2 និង A^3

គេបាន $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+3.4 & 2.3+3.5 \\ 4.2+5.4 & 4.3+5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{pmatrix}$

និង

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.2+21.4 & 16.3+21.5 \\ 28.2+37.4 & 28.3+37.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 153 \\ 204 & 269 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 116 & 153 \\ 204 & 269 \end{pmatrix}$ ។

e / Properties of matrix operations

បើ A, B, C ម៉ាទ្រីស និង α, β, μ ជាបីចំនួនពិតឬស្កាលែនោះគេមាន :

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
6. $A.(B.C) = (A.B).C$
7. $A.(B + C) = A.B + A.C$

3. $\alpha(A+B+C)=\alpha A+\alpha B+\alpha C$

4. $(\alpha+\beta+\mu)A=\alpha A+\beta A+\mu A$

5. $O+A=A+O=A$

8. $(A+B).C=A.C+B.C$

9. $A.B \neq B.A$

10. $A\,.\,I_n=I_n\,.\,A=A$

5. ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសការេ

a / Determinant of order 2×2

គេឱ្យម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2 កំនត់ដោយ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ។

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ :

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

គេបាន $|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=7.8-3.5=56-15=41$

ដូចនេះ $|A|=\det(A)=41$ ។

b / Minors and Cofactors :

គេឱ្យម៉ាទ្រីសការេ $A=(a_{ij})_{nn}$ ។

☞ Minor នៃធាតុ a_{ij} ជាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសដែលបន្ទាប់ពីលុបលីញទី i និងកូឡោនទី j ចេញ ដែលគេកំនត់តាង Minor នៃធាតុ a_{ij} ដោយ M_{ij} ។

☞ Cofactor នៃធាតុ a_{ij} កំនត់តាងដោយ $C_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$ ។

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ចូរគណនាមីណរ័និងកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ a_{21} ?

គេបាន $M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=8-24=-16$ និង $C_{21}=(-1)^{2+1}.16=16$ ។

c / Determinant of order 3×3

គេឱ្យម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 កំនត់ដោយ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយៈ

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$$ ។

d / Determinant of order $n\times n$

គេឱ្យម៉ាទ្រីសការេ $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ ។ ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសនេះកំនត់តាងដោយ :

$$|A|=\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+a_{i3}C_{i3}+........+a_{in}C_{in}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.C_{ik}\right)$$

$$|A|=\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+a_{i3}C_{i3}+........+a_{in}C_{in}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.C_{ik}\right)$$

6. សមីការនៃម៉ាទ្រីស

a / Matix Cofactors :

ម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រនៃម៉ាទ្រីសការេ $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសកំនត់ដោយ $C=\left(C_{ij}\right)_{nn}$

ដែល $C_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$ ។

b / Adjoint Matix :

ម៉ាទ្រីស Adjoint នៃម៉ាទ្រីសការេ

$A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ

នៃម៉ាទ្រីសការេ $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ ដែលគេកំនត់សរសេរ $Adj(A)=\left(C\right)^{T}$ ។

c / **ម៉ាទ្រីសទោល** :

ដែលហៅថាម៉ាទ្រីសទោលគឺជាម៉ាទ្រីសការេដែលមានដេទែមីណង់ស្មើសូន្យ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសទោល ។

d / Invers of Matix :

បើ A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសទោលនោះ ចំរាស់នៃម៉ាទ្រីសការេ

$A = (a_{ij})_{nn}$ ជាម៉ាទ្រីសដែល

តាងដោយ A^{-1} និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ ។

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ាទ្រីសច្រាស់ (Matrix inverses) នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} .$$

e / រូបមន្តកំនត់រកម៉ាទ្រីសច្រាស់ :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \operatorname{Adj}(A)}$$

f / រូបមន្តរកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2 :

បើគេមាន $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូររកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

g / សមីការម៉ាទ្រីស :

ឧបមាថាគេមានម៉ាទ្រីសបី A , B , X ដែល $\det(A) \neq 0$ ។

ទំនាក់ទំនង $A.X = B$ (ហៅថាសមីការម៉ាទ្រីស)

បើយើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង A^{-1} គេបាន :

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$ ដោយ $A^{-1}.A = I$ និង $I.X = I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា

ដូចនេះ $X = A^{-1}.B$ ។

7. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែ :

ក -និយមន័យ :

ប្រពន្ធ័មាន n សមីការលីនេអ៊ែមាន n អញ្ញាតដែលមានទម្រង់ជា :

$$(S)\ :\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3x}x_n = b_3 \\ ------------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ហៅថាប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែមាន n អញ្ញាត និង n សមីការ ។

ខ -ចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែ :

បើសិនជាគេតាង

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .... \\ x_4 \end{pmatrix}\ \text{and}\ \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_n \end{pmatrix}$$

ប្រព័ន្ធសមីការ (S) អាចសរសេរក្រោមទម្រង់សមីការម៉ាទ្រីស $A.X = B$ ។

បើ $\det(A) \neq 0$ គេទាញបាន $X = A^{-1}.B$ ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&1&3&4&1\\1&3&1&0&2\\4&2&3&1&2\\0&1&4&3&1\\5&1&2&7&4\end{pmatrix}$

ក-ចូរបញ្ជាក់ប្រភេទ និង លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-ចូរកំនត់តម្លៃនៃធាតុ a_{25} , a_{34} , a_{52} , a_{43} ។

គ-ចូរសរសេរធាតុទាំងអស់ដែលនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 5×5 ។

ខ-កំនត់តម្លៃនៃធាតុ :

គេបាន $a_{25}=2$, $a_{34}=1$, $a_{52}=1$, $a_{43}=4$ ។

គ-ធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេសមាន :

$a_{11}=2$, $a_{22}=3$, $a_{33}=3$, $a_{44}=3$, $a_{55}=4$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរកំនត់តម្លៃ x , y , z, t ដើម្បីឱ្យ $\begin{pmatrix}e^x & \ln y\\ 2^z & \log_3 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\8&2\end{pmatrix}$

គេបាន $\begin{cases}e^x=2\\ \ln y=3\\ 2^z=8\\ \log_3 t=2\end{cases} \Rightarrow \quad x=\ln 2 , \ y=e^3 , \ z=3 , \ t=9$ ។

លំហាត់ទី៣

កំនត់រកម៉ាទ្រីស X and Y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$X+Y=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix} \text{ and } 3X-2Y=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $X+Y=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix} \Rightarrow 2X+2Y=\begin{pmatrix}6&10\\14&18\end{pmatrix}$ (1)

និង $3X-2Y=\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}$ (2) ។ បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$5X=\begin{pmatrix}6&10\\14&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5\\6&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15\\20&25\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$$

ហើយ $Y=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix}3&5\\7&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $X=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ and $Y=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ទី៤

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធតាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}2x+3y=107\\3x+4y=148\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}107\\148\end{pmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ $A.X=B \Rightarrow X=A^{-1}.B$

តាមរូបមន្ត $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{2.4-3.3}.\begin{pmatrix}4&-3\\-3&2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}4&-3\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\3&-2\end{pmatrix}$

គេបាន $X=\begin{pmatrix}-4&3\\3&-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}107\\148\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4(107)+3(148)\\3(107)-2(148)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\25\end{pmatrix}$

នាំឱ្យ $x=16, y=25$ ។

លំហាត់ទី៥

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធតាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

គេបាន $A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

បន្ទាប់ពីគណនាគេបាន $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

គេទាញ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_4 = 4$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

ក-ចូររកម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ C នៃម៉ាទ្រីស A

រួចទាញរក Adjoint Matrix : Adj(A) ។

ខ-គណនាដេទែមីណង់ $\det(A) = |A|$ ។

គ-ទាញរកម៉ាទ្រីសច្រាស់ A^{-1} នៃម៉ាទ្រីស A (Inverse of Matrix)

ឃ-ចូរទាញបញ្ចេញចម្លើយប្រព័ន្ធ (S) : $\begin{cases} 2x+y+4z=23 \\ x+y+2z=13 \\ 3x+y+5z=29 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ក-រកម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ C និងម៉ាទ្រីសអាហ្សង់ adj(A)

គេមាន $C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{11}=2$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5-2=3$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{12}=1$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}.M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-(5-6)=1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{13}=4$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}.M_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-3=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{21}=1$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}.M_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-5+4=-1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{22}=1$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}.M_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=10-12=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{23}=2$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}.M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(2-3)=1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{31}=3$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}.M_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}1&4\\1&2\end{vmatrix}=2-4=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{32}=1$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}.M_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=4-4=0$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{33}=5$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}.M_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=2-1=1$$

ដូចនេះ $C=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-1&-2&1\\-2&0&1\end{pmatrix}$ និង $adj(A)=C^T=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\1&-2&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$ ។

ខ-គណនាដេទែមីណង់ $det(A)=|A|$

តាមរូបមន្ត $det(A)=|A|=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$

$$=2(3)+1(1)+4(-2)=6+1-8=-1$$

ដូចនេះ $det(A)=|A|=-1$ ។

គ-ទាញរកម៉ាទ្រីសច្រាស់ A^{-1} នៃម៉ាទ្រីស A

តាមរូបមន្តគេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}\times adj(A)=\begin{pmatrix}-3&1&2\\-1&2&0\\2&-1&-1\end{pmatrix}$ ។

ឃ-ទាញបញ្ចេញចម្លើយប្រព័ន្ធ $(S):\begin{cases}2x+y+4z=23\\x+y+2z=13\\3x+y+5z=29\end{cases}$

តាង $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\1&1&2\\3&1&5\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}23\\13\\29\end{pmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរជា $A.X=B\Rightarrow X=A^{-1}.B$

ដោយ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេបាន $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}23\\ 13\\ 29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-69+13+58\\ -23+26+0\\ 46-13-29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $x=2\ ,\ y=3\ ,\ z=4$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & x & 6\\ 7 & 8 & x+4\end{pmatrix}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់ x ដើម្បីឱ្យ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាស់ ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត x

ដើម្បីឱ្យ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាស់លុះត្រាតែវាជាម៉ាទ្រីសទោល មានន័យថា $\det(A)=0$

គេបាន $\det(A)=1.\begin{vmatrix}x & 6\\ 8 & x+4\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & x+4\end{vmatrix}+3.\begin{vmatrix}4 & x\\ 7 & 8\end{vmatrix}$

$=x^2+4x-48-8x-32+84+96-21x$

$=x^2-25x+100=0 \Rightarrow x_1=5\ ,\ x_2=20$

ដូចនេះ $x\in\{\ 5\ ,\ 20\ \}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១.គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&3&9&7\\4&1&2&8\\2&4&5&1\\5&7&6&4\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}2&7&3&9\\5&1&8&4\\1&2&7&1\\4&2&5&6\end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា $M=A+B$ and $N=A-B$ ។

ខ-ចូរគណនា $P=2A+3B$ and $Q=3A-2B$ ។

2. គេឱ្យម៉ាទ្រីសពីរ $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\3&4&1\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&3&4\\3&5&4\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណម៉ាទ្រីស $A.B$ ។

3. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&3&5\\2&3&4\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}1&8&-3\\2&5&-1\\3&-2&4\end{pmatrix}$

ចូរគណនា $A.B$ និង $B.A$ ។

4. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$ ។

ចូរគណនា A^2 , A^3 and A^4 ។

5. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&4&-2\\1&-3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}14&-9&-12\\3&7&1\\-1&6&8\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណ $A.B$ ។

6. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\5&-3&-1\\-3&2&1\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណ $A.B$ ។ តើគេអាចសន្និដ្ឋានបានដូចម្ដេច?

7. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$

ក- កំណត់រកម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ A^T នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-គណនាផលគុណ $A.A^T$ និង $A^T.A$ ។

8. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\3&2&0\\2&1&4\end{pmatrix}$

ក-កំណត់ម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-ទាញរកម៉ាទ្រីស $\text{Adj}(A)$ ។

9.គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\2&7&0\end{pmatrix}$

រកម៉ាទ្រីសច្រាស់របស់វា ។

10. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}0&2&7\\1&6&2\\2&3&4\end{pmatrix}$

ក-កំណត់ $\text{Adj}(A)$ ។

ខ-កំណត់ A^{-1} ។

11. កំនត់រកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\2&0&3&1\\0&2&2&1\\1&3&4&2\end{pmatrix}$ ។

12. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ and $C=\begin{pmatrix}14&13\\24&23\end{pmatrix}$

កំនត់ចំនួនពិត a, b, c, d ដើម្បីឱ្យ $A.B=C$ ។

13. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាម៉ាទ្រីសទោល រួចគណនា A^2 និង $(A^T)^2$ ។

14. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា A^2, B^2 , $A.B$ រួចទាញរក $A^2+2A.B+B^2$ ។

ខ-គណនា $A+B$ and $(A+B)^2$

គ-ប្រៀបធៀប $(A+B)^2$ និង $A^2+2A.B+B^2$

15. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

ចូរប្រៀបធៀប $A^2.A^3$, $A^3.A^2$, $A^4.A$ and $A.A^4$ ។

16. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា A^2, A^3, A^4 ។

ខ-ទាញរក $A^n, \forall n\in IN^*$ ។

17. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & d\end{pmatrix}$, $a,b,c,d\in IR-\{\ 0,-1,\ +1\ \}$

ក-ចូរគណនា A^2, A^3, A^4 ។

ខ-ទាញរក $A^n, \forall n\in IN^*$ ។

គ-គណនាផលបូក $S=A+A^2+A^3+.....+A^n$ ។

18. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&4&1&5\\0&0&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ក-គណនា $A^2\ ,(A^T)^2\ ,A^2+2A.A^T+(A^T)^2$

ខ-ប្រៀបធៀប $(A+A^T)^2$ and $A^2+2A.A^T+(A^T)^2$

19-គេឱ្យ A and B ជាម៉ាទ្រីសការេមានលំដាប់ដូចគ្នា ។

បើ $A.B=B.A$ ចូរបង្ហាញថា $(A.B)^n=A^n.B^n$ ។

20. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&3&5\\1&-3&-5\end{pmatrix}$

ក-បង្ហាញថា $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-5&3&1\\3&-2&-1\end{pmatrix}$

ខ-ដោះស្រាប្រព័ន្ធតាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2\\-2x_1+3x_2+5x_3=7\\x_1-3x_2-5x_3=-9\end{cases}$

21. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធតាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=20\\2x_1-3x_2+4x_3=11\\3x_1+5x_2-2x_3=13\end{cases}$