វិទ្យាល័យព្រះសីហនុ

កំរងវិញ្ញាសា ប្រលងសិស្សពូកែ

ផ្នែក គណិតវិទ្យា

ប្រលងជ្រើសរើសទូទាំងប្រទេស

ថ្នាក់ទី ១២

ពីឆ្នាំ ២០០០ ដល់ ២០១២

រៀបរៀងដោយ ឈុន សេងណាំ

1998
3.ទី I
RAW
C.S.N

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែថ្នាក់ខេត្តក្រុង

សម័យប្រឡង : ១៥ កក្កដា ១៩៩៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

រយៈពេល : ៣ ម៉ោង (សម្រាប់វគ្គទីមួយ)

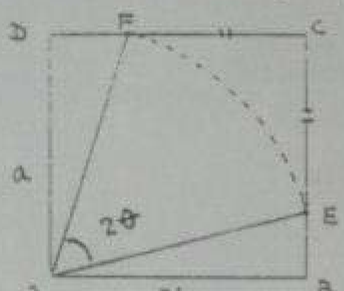
១- គណនា $S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots11}_{n\ \text{តួ}}$ ។

២- ដោះស្រាយសមីការ $\sin(\sin x) = 1$ ។

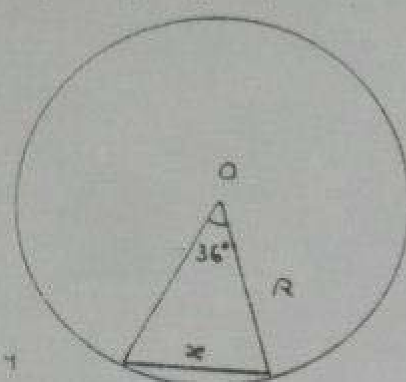
៣- គណនា $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤- f និង g ជាអនុគមន៍ ហើយ f' និង g' ជាដេរីវេ ។ រកទំនាក់ទំនងរវាង f និង g ដើម្បីអោយ $f.f' = g.g'$ ។

៥- (រូបទី១) ABCD ជាការេដែលមានជ្រុង a ហើយ AFE ជាចំរៀកថាសដែលមានផ្ចិត A និង មុំ 2θ ។ បង្ហាញថា $1 + \sin 2\theta = 4\theta$ ជាសមីការដែលធ្វើអោយក្រលាផ្ទៃនៃចំរៀកថាសស្មើពាក់កណ្ដាលនៃក្រលាផ្ទៃការេ ។



រូបទី១

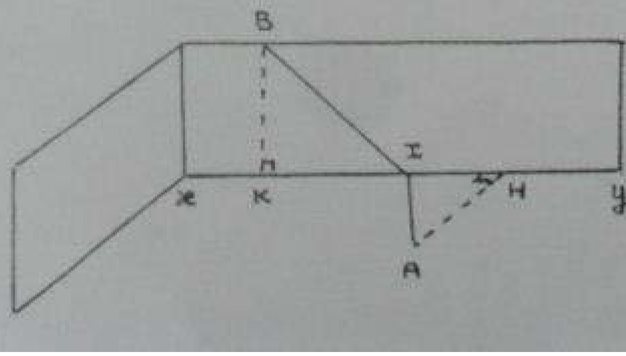


រូបទី២

៦- ចំពោះរូបធរណីមាត្រ (រូបទី២) បង្ហាញថា $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ។

៧- គេអោយស្វ៊ីត $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$; $n \in N$ ដែល $x_0 = 1$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $n \in N$: $x_n \geq -2$ ។

៨- A និង B ជាចំនុចនឹង ហើយ I ជាចំនុចមួយនៅលើ (xy) ដូចរូបខាងក្រោម ដោយដឹងថា $|BK| = 3$ m ; $|AH| = 1,5$ m ; $|KH| = 9$ m ។ ចូរកំនត់ទីតាំងនៃ I លើ (xy) ដើម្បីអោយប្រវែង $|IA| + |IB|$ មានតម្លៃតូចបំផុត ក្នុងករណីនេះ គេត្រូវគណនាប្រវែង $|IH|$ ។



1998

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

សម័យប្រឡង : ១៩ កក្កដា ១៩៩៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

រយៈពេល : ៣ ម៉ោង (សំរាប់ថ្ងៃទីពីរ)

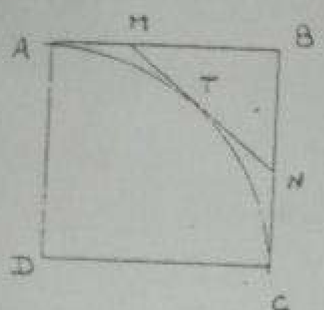
១- គេមានសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ដែល a និង c ខុសពីសូន្យ ហើយ α និង β ជាឫសនៃសមីការ ។

គេតាង : $S_2 = \alpha^2 + \beta^2$; $S_3 = \alpha^3 + \beta^3$; ...... ; $S_n = \alpha^n + \beta^n$

ក- បង្ហាញថា $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$ ។

ខ- គណនា $\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^{10} + \left(\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^{10}$ ។

២-



ABCD ជាការេដែលមានជ្រុង 1 dm ។ គេសង់រង្វង់ដែលមានផ្ចិត D និងកាំ 1 dm ។ T ជាចំនុចមួយនៃធ្នូ AC ។ បន្ទាត់មួយប៉ះរង្វង់ត្រង់ T កាត់ [AB] ត្រង់ M និង [BC] ត្រង់ N ។ រកទីតាំងនៃ T ដើម្បីអោយ [MN] មានរង្វាស់ខ្លីបំផុត ។

៣- ដោះស្រាយសមីការ $(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}} = (1-x^2)^{\frac{1}{6}}$

៤- $f(x) = x^3 + x + 6$ ដែល $x \in \mathbb{Z}$ ។ ចូររកតំលៃ x ដើម្បីអោយ $f(x)$ ជាការេនៃចំនួនគត់ ។

៥- រថយន្តមួយធ្វើដំណើរពីចំនុច A ឆ្ពោះទៅចំនុច B ។ គេមានផ្លូវកៅស៊ូតែមួយគត់គឺតាមបន្ទាត់ (HB) ក្រៅពីនេះគឺជាផ្លូវដីខ្សាច់ ។ ដោយដឹងថា | AH | = 60 km ហើយ | HB | = 80 km :

- បើគេធ្វើដំណើរតាមផ្លូវកៅស៊ូ HB រថយន្តនោះស៊ីប្រេង 0,1 លីត ក្នុង 1 km ។
- បើគេធ្វើដំណើរតាមផ្លូវដីខ្សាច់ រថយន្តនោះស៊ីប្រេង 0,2 លីត ក្នុង 1 km ។

តើគេត្រូវធ្វើដំណើរតាមវិធីណា ដើម្បីអោយរថយន្តនោះស៊ីប្រេងតិចបំផុត ។

2002

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០១-២០០២

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ ថ្ងៃទី២៣-៥-០២ (រយៈពេល : ៣ម៉ោង ពិន្ទុ : ១០០)

១. (ពិន្ទុ ១០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ដែល $n\in \mathbb{N}$ ។

២. (ពិន្ទុ ១០) ចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀងតាមលំដាប់ $x; x+1; x+2; 3x; x+3$ ហើយគេដឹងថា ចំនួននោះជាការេប្រាកដ ។ ចូររកចំនួននោះ ។

៣. (ពិន្ទុ ១០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ B ដែលមាន $[CI]$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ C ។ បើ $IB=1\,cm, BC=3\,cm$ ហើយគេតាង $AI=x, AC=y$ ចូរគណនា x និង y ។

៤. (ពិន្ទុ ១០) $\forall n\in \mathbb{N}^*$ ចូរបញ្ជាក់ថា $E=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ច ។

៥. (ពិន្ទុ ១០) $a;b;c$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$$

៦. (ពិន្ទុ ១០) U ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $\forall n\in \mathbb{N}$

$$U_{n+2}=5U_{n+1}-6U_n$$

ចូរកំណត់តំលៃ x ដែលនាំអោយ $V_n=U_{n+1}-xU_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

៧. (ពិន្ទុ ២០) ដោះស្រាយវិសមីការ $1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

៨. (ពិន្ទុ ២០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ A ដែលមាន $BC=a$ ហើយមានរង្វង់មួយដែលមានកាំ r ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ ចូររករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ ABC ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ ទូទាំងប្រទេស — 2002 (I)
សម័យប្រឡង 23-5-02
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី 12

ឈ្មោះ [illegible]

អត្រាកំណែ

10 1. ស្រាយបញ្ជាក់ $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ គឺ $f(n)\equiv 0\,[8]$

$$f(n)=3^{2n}+7$$

ចំពោះ $n=0$ $\quad f(0)=3^0+1=8\equiv 0\,[8]$

$n=1$ $\quad f(1)=3^2+7=16\equiv 0\,[8]$

ឧបមាថាពិតចំពោះ n, $f(n)\equiv 0\,[8]$ គេត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(n+1)\equiv 0\,[8]$ — 3

$$f(n+1)=3^{2(n+1)}+7=9.3^{2n}+7=8.3^{2n}+3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$$

ដោយ: $8.3^{2n}\equiv 0\,[8]$; $3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$ — 7

ហេតុនេះ $\forall n$, $3^{2n}+7\equiv 0\,[8]$

① អាចធ្វើតាម
$9\equiv 1\,[8]$
$9^n\equiv 1^n\,[8]$
$9^n+7\equiv 1+7\,[8]$
$\equiv 0\,[8]$

10 2. រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដ $x, x+1, x+2, 3x, x+3$

ពិន្ទុ10 ឬ0

$3x\leq 9$ នោះ $x\leq 3$ ដែល $x\neq 0$ ព្រោះលេខមិនកំណត់

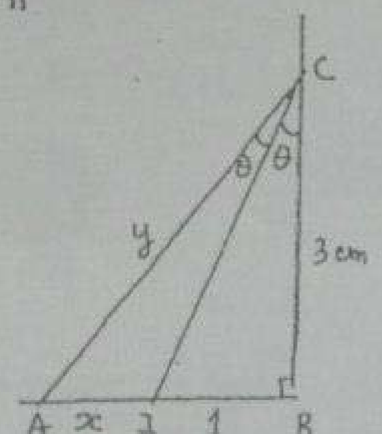
បើ $x=1$ ចំនួននោះ 12334 មិនមែនជាការេ

បើ $x=2$ ចំនួននោះ 23465

បើ $x=3$ ចំនួននោះ 34596

ចំនួនជាការេប្រាកដ គឺ $34596=186^2$

3. គណនារង្វាស់ x និង y



ABC ត្រីកោណកែងត្រង់ B $[CI]$ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ C

$IB=1\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$; $AI=x$ $AC=y$

$\tan\theta=\frac{1}{3}$ តាមរូបមន្ត $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{3}{4}$

$\tan 2\theta=\frac{x+1}{3}$

$\frac{x+1}{3}=\frac{3}{4}$;

$x=\frac{5}{4}\text{ cm}$ — 5

$y=\frac{15}{4}\text{ cm}$ — 5

វិធី 3 គេធ្វើតាម:

$$\begin{cases}(x+1)^2+9=y^2\\ \frac{x}{y}=\frac{1}{3}\ (\text{តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះ})\end{cases}$$

$y=3x$

$(x+1)^2+9=9x^2$

$8x^2-2x-10=0$

$\Delta'=1+80=81$

$x=\frac{1+9}{8}=\frac{5}{4}\text{ cm}$

$y=\frac{15}{4}\text{ cm}$

4. បង្ហាញថា $E = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

ដោយ $1897 = 7 \times 271$ គេត្រូវស្រាយ $E \equiv 0\,[7]$, $E \equiv 0\,[271]$

$$
\left.
\begin{aligned}
+\ E &= (2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n) \\
&= (2903 - 803)\,A(n) - (464 - 261)\,B(n) \\
&= 2100\,A(n) - 203\,B_n = 7\,(300\,A(n) - 29\,B(n)) \equiv 0\,[7]
\end{aligned}
\right]\ 5
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
+\ E &= (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n) \\
&= (2903 - 464)\,C(n) - (803 - 261)\,D(n) \\
&= 271\,[9\,C(n) - 2\,D(n)] \equiv 0\,[271]
\end{aligned}
\right]\ 5
$$

$\forall n \quad E \equiv 0\,[1897]$

10 5. ស្រាយបញ្ជាក់ $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$

ចំពោះ a, b, c ជាជ្រុងត្រីកោណ

តាង $x = b+c-a$; $y = c+a-b$; $z = a+b-c > 0$

$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$; $\frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}$; $\frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx}$

$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant xyz$

$\frac{1}{8}\, 2c.2a.2b \geqslant (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$abc \geqslant -2abc + a^2b + a^2c - a^3 + ab^2 + b^2c - b^3 + ac^2 + bc^2 - c^3$

$3abc \geqslant a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)$

10 6. កំណត់តំលៃ x ដែលនាំអោយ $V_n = U_{n+1} - xU_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$; $V_n = U_{n+1} - xU_n$; $U_{n+1} = V_n + xU_n$

$$
\left.
\begin{aligned}
V_{n+1} &= U_{n+2} - xU_{n+1} \\
&= 5U_{n+1} - 6U_n - xU_{n+1} \\
&= 5(V_n + xU_n) - 6U_n - x(V_n + xU_n) \\
&= V_n(5-x) + (5x - 6 - x^2)\,U_n
\end{aligned}
\right]\ 6
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&= x^2 - 5x + 6 \qquad && x = 2 \\
&\quad 5 - x \neq 0 && x = 3
\end{aligned}
\right]\ 4
$$

ឈ្មោះ ...

៤. ដោះស្រាយវិសមីការ $1-\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$D =]-1;+\infty[$

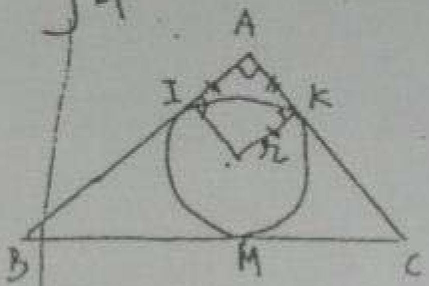
a. ករណី $1-\frac{x}{2} \leq 0$ នោះ

$\begin{cases} 1-\frac{x}{2} \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow E_1 = [2;+\infty[$ 8

b. ករណី $1-\frac{x}{2} > 0$

$1-\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$; $\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{1}{1+x}$; $\begin{cases} x^2(x-3)<0 \\ 1-\frac{x}{2}>0 \end{cases}$; $E_2 =]-1;0[\cup]0;2[$

$E = E_1 \cup E_2 =]-1;0[\cup]0;+\infty[$ 4



8. រករង្វាស់ជ្រុង b និង c

p ជាបរិមាត្រ

$p = r + KC + CH + BH + HI + r$

$= 2r + 2CH + 2BH$

$= 2r + 2a$

ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ

$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$

$\Rightarrow bc = rp = 2r(a+r)$

ដោយ $p = a+b+c = 2r+2a$

$\Rightarrow b+c = 2r+a$ 10

យើងបាន $\begin{cases} b+c = 2r+a \\ bc = 2r(a+r) \end{cases}$

ជាឫសសមីការ $x^2 - (a+2r)x + 2r(a+r) = 0$ $r \leq \frac{a}{2+2\sqrt{2}}$

$\Delta = a^2 - 4ar - 4r^2$ ត្រូវផ្ទៀង

$\Delta \geq 0$ កាលណា $a \geq 2r + 2r\sqrt{2}$ 2

សិក្សាសញ្ញា Δ

$f(a) = a^2 - 4ar - 4r^2$

$\Delta' = 4r^2 + 4r^2$

Δ	0	$2r+2r\sqrt{2}$
$f(a)$	−	0 +

$a \geq 2r + 2r\sqrt{2}$

($b = \frac{1}{2}\left(a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$ 4

និង $c = \frac{1}{2}\left(a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$) 4

(ឬ $b = \frac{1}{2}\left(a+2r-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$

និង $c = \frac{1}{2}\left(a+2r+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}\right)$)

ពូកែប្រទេស
2002
ទី II
ឈុន សេងលាក់

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែថ្នាក់ប្រទេស
វិជ្ជាអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា
ថ្នាក់ទី៩ និងទី១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០១-២០០២

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ ថ្ងៃទី២៨-៤-០២ (រយៈពេល : ៣ម៉ោង ពិន្ទុ : ១០០)

១. (ពិន្ទុ ២០) $\forall n \in N$: f ជាអនុគមន៍មួយកំណត់ដូចខាងក្រោម:
$f(n+2)=2f(n+1)-f(n)+1$ ដែល $f(0)=f(1)=0$ ។ ចូរគណនា $f(2002)$ ។

២. (ពិន្ទុ ២០) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ C ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $a;b;c$ ។ P ជាចំណុចក្នុងអង្កត់ $[AC]$ ដែលធ្វើអោយគេមានរង្វង់ចារឹកប៉ុនគ្នានៅក្នុងត្រីកោណរៀងគ្នា PBA និងត្រីកោណ PBC ។ បើ $PC=x$ រក x ជាអនុគមន៍នៃ $a;b;c$ ។

៣. (ពិន្ទុ ២០) $abcde$ ជាចំនួនមួយដែលមានប្រាំខ្ទង់ដែល $a;b;c;d;e$ ជាលេខ ។ ជាការគួរអោយ ចំលែកនៅពេលដែលគេគុណចំនួននោះនឹង 4 គេទទួលបានលទ្ធផលជាចំនួនមាន ប្រាំខ្ទង់ គឺ edcba ។

ចូររកចំនួននោះដោយធ្វើការពន្យល់ ។
$$\begin{array}{r} abcde \\ \times \quad 4 \\ \hline edcba \end{array}$$

៤. (ពិន្ទុ ២០) រង្វង់ពីរដែលមានផ្ចិតរៀងគ្នា A និង B ដែល $AB=a$ និងមានរង្វាស់កាំរៀងគ្នា R និង r ដែល $R>r$ ។ AC និង BD ជាកាំនៃរង្វង់ទាំងពីរស្របគ្នាហើយមានទិសដៅដូចគ្នា ហើយ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[CD]$ ។ រកសំណុំចំណុចនៃ M កាលណាកាំ AC និង BD ផ្លាស់ទីដោយស្របគ្នា និងទិសដៅ ដូចគ្នាដដែល ។

៥. (ពិន្ទុ ២០) ស្ពានមួយអាចឆ្លងបានត្រឹមមនុស្សពីរនាក់ ។ នៅយប់មួយងងឹតដែលគ្មានពន្លឺភ្លើងសោះនោះ មនុស្សប្រាំនាក់ ត្រូវឆ្លងស្ពាននោះដោយមានចង្កៀងពិលតែមួយគត់ ល្បឿនរបស់ពួកគេនៃការឆ្លងស្ពានម្នាក់ៗសុទ្ធតែខុសគ្នា គឺអ្នកទី ១ $1mn$ អ្នកទី ២ $3mn$ អ្នកទី ៣ $6mn$ អ្នកទី ៤ $8mn$ និងអ្នកទី ៥ $12mn$ ។ វិធីដែលឆ្លងស្ពានមានតែមួយគត់គឺគេឆ្លងម្តងពីរនាក់ ដោយអោយអ្នកដែល មានល្បឿន យឺតកាន់ចង្កៀងដើរមុខគេ ធ្វើជាអ្នកបំភ្លឺ ។ នៅពេលអ្នកទាំងពីរឆ្លងដល់ត្រើយម្ខាងហើយ ត្រូវមានម្នាក់ជាអ្នកកាន់ចង្កៀងវិលត្រលប់មកវិញ ដើម្បីនាំមនុស្សដែលនៅសល់ឆ្លងទៀត ។ ចូររករយៈពេលខ្លីបំផុតដើម្បីអោយពួកគេឆ្លង ស្ពានផុត ដោយបញ្ជាក់ពីរបៀបឆ្លងស្ពាន ។

ដំណោះស្រាយ គណិត ប្រឡងប្រជែង 2002

1/. គណនា $f(2002)$: $f(n+2)=2f(n+1)-f(n)+1$ (II)

វិ.ព្រះសីហនុ

$$\begin{cases} f(n+2)-2f(n+1)+\cancel{f(n)}-1=0 \\ f(n+1)-2\cancel{f(n)}+f(n-1)-1=0 \\ \cancel{f(n)}-2f(n-1)+f(n-2)-1=0 \\ f(n-1)-2f(n-2)+f(n-3)-1=0 \\ \vdots \\ f(4)-2f(3)+\cancel{f(2)}-1=0 \\ f(3)-2\cancel{f(2)}+f(1)-1=0 \\ \cancel{f(2)}-2f(1)+f(0)-1=0 \end{cases}$$

បូក 2 ជួរ

បូក n-1 ជួរ

$$f(n+2)-f(n+1)-f(1)+f(0)-(n+1)=0$$ ដោយ $f(1)=f(0)=0$

ទាញបាន $f(n+2)-f(n+1)=n+1$ $\longrightarrow$ (8 ពិន្ទុ)

$$\begin{cases} f(n+2)-\cancel{f(n+1)}=n+1 \\ \cancel{f(n+1)}-\cancel{f(n)}=n \\ \cancel{f(n)}-\cancel{f(n-1)}=n-1 \\ \cancel{f(n-1)}-f(n-2)=n-2 \\ \vdots \\ f(3)-\cancel{f(2)}=2 \\ \cancel{f(2)}-f(1)=1 \end{cases}$$

$$f(n+2)-f(n)=1+2+3+\dots+n+n+1$$

$$f(n+2)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$ ហេតុនេះ $f(n)=\frac{1}{2}(n-1)(n)$ $\rightarrow$ (8)

$n=2002$: $f(2002)=\frac{1}{2}(2001)\cdot 2002=1001\cdot 2001=(1000+1)2001$

$=2001000+2001=2003001$ $\rightarrow$ (5)

2) រកតម្លៃ $f(2002)$

$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 1$; $f(0) = f(1) = 0$

$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 1$. (1)

តាង $g(n) = f(n+1) - f(n)$ នាំឲ្យ $g(n+1) = f(n+2) - f(n+1)$

(1) $g(n+1) = g(n) + 1$

$g(n+1) - g(n) = 1$ ពិត.

នាំឲ្យ $g(n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$

ហើយគេបាន $g(n) = g(0) + nd = 0 + n = n$.

$g(n+1) = n+1$

ម្យ៉ាងទៀត : $g(n+1) - g(n) = n$.

ចំពោះ $n=0$ $g(1) - g(0) = 0$

$n=1$ $g(2) - g(1) = 1$

$n=2$ $g(3) - g(2) = 2$

$\vdots$

$n=k$ $g(k+1) - g(k) = k$

បូកអង្គនិងអង្គ : $g(k+1) - g(0) = 0+1+2+\cdots+k = \frac{k}{2}(k+1)$

ឬ $g(k+1) = \frac{k}{2}(k+1)$

ចំពោះ $k=2001$: $g(2002) = \frac{2001}{2}(2002) = 2003001$

<u>របៀបទី ២ ទៀត</u> : $f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + 1$

ដោយយក $n+1=k$: $f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) + 1$

គេបាន $k=1$ $f(2) - f(1) = f(1) - f(0) + 1$

$k=2$ $f(3) - f(2) = f(2) - f(1) + 1$

$\vdots$

$k=n-1$ $f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) + 1$

$f(n) - f(1) = f(n-1) - f(0) + (n-1)$

$f(n) - f(n-1) = (n-1)$ $\quad$ ($f(1) = f(0) = 0$)

គេបាន $n=1$ $f(1) - f(0) = 0$

$n=2$ $f(2) - f(1) = 1$

$\vdots$

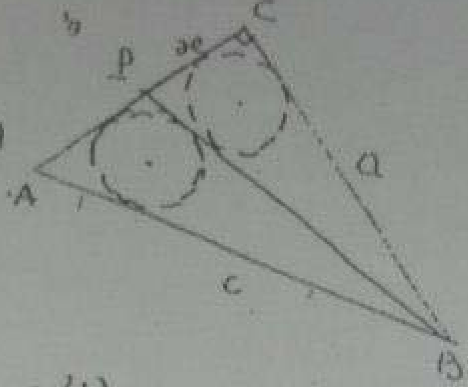
$n=n$ $f(n) - f(n-1) = (n-1)$

$f(n) - f(0) = 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)}{2}(n-1+1)$

$f(2002) = 2003001$

2) គេអោយស្គាល់ $x > 0$

គេដឹងថា $r = \frac{S}{P/2}$



$$\frac{\frac{1}{2}xa}{\frac{1}{2}(a+\sqrt{x^2+a^2}+x)} = \frac{\frac{1}{2}(b-x)a}{\frac{1}{2}(c+\sqrt{x^2+a^2}+b-x)} \quad (5)$$

$$xc + xa - ab = (b-2x)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$(b-2x)^2(x^2+a^2) - (xc+xa-ab)^2 = 0$$

$$4x^4 - 4bx^3 + (3a^2+b^2-c^2-2ac)x^2 + (2abc - 2a^2b)x = 0$$

$$\boxed{2x(x-b)\left[2x^2+(a^2-ac)\right] = 0} \quad (10) \rightarrow (5)$$

ដោយលក្ខខណ្ឌ: $0 < x < b$ នោះគេបាន: $x = \sqrt{\frac{ac-a^2}{2}}$ ព្រោះ $ac - a^2 = a(c-a) > 0$

ពីព្រោះ: $c > a$

3. រក A, B, C, D, E

* A មិនអាចធំជាង២ $A \leq 2$

បើ $A=1$ នោះ $A \times 4 = E = 4$

បើ $E=4$ នោះ $4 \times E = 16$ មានន័យថា $A=6$ ពិតជាមិនអាច

ដូច្នេះ $A=2$ គឺអោយ $E=8$ ព្រោះ $4 \times A = E$

ហើយរកបាន

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ \times \quad 4 \\ \hline EDCBA \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 2BCD8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8DCB2 \end{array}$$

* ចូលទៅពិនិត្យតម្លៃ B : B មិនអាចធំជាង២ : $B \leq 2$

បើ $B=1$ គណនាវិធីគុណនឹងត្រឹម

$$\begin{array}{r} 21CD8 \\ \times \quad 4 \\ \hline 8DC12 \end{array}$$

គណនាឃើញថា

$$\begin{array}{r} 21C78 \\ \times \quad 4 \\ \hline 87C12 \end{array}$$

ក្នុងករណីនេះយើងត្រូវស្វែងរកតម្លៃ D

ដើម្បី D ត្រូវតែជាតម្លៃប្រាកដដើម្បី

អោយ $4 \times D$ ចេញលេខខ្ទង់ 1

ដូច្នេះ $D=7$ $D \times 4 = 28$ ត្រូវត្រាទុក ៣

គណនាឃើញថា

$C = 9$

ចម្លើយគឺចំនួនត្រូវរក

21978

ករណីមាន

ចម្លើយ

$\rightarrow A=2$

$E=8$

$B=1$

$D=7$

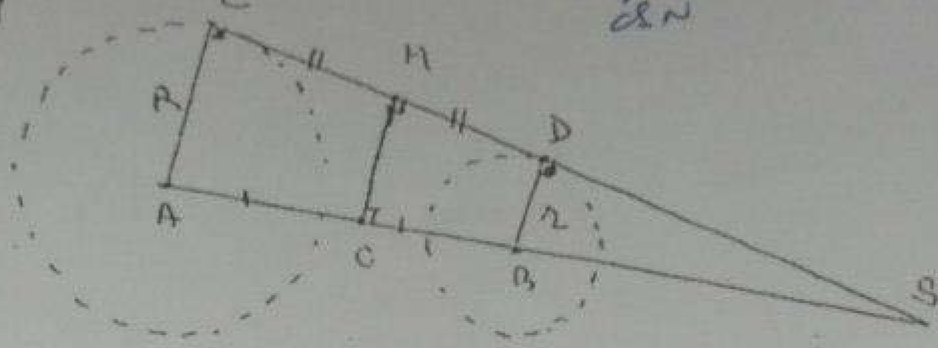
$C=9$

ពិន្ទុ 4 ពិន្ទុ

បើមិនមានដំណើរ

អោយ 10p

ក) រកសំណុំចំណុច M



នាំ $(MO)//(AC)//(DB)$

O ជាចំណុចកណ្ដាល AB => O ជាចំណុចនឹង

$S = (CD) \cap (AB)$

$\Delta SOM \sim \Delta SAC \sim \Delta SBD$

$\left.\begin{matrix} SOM \\ SBD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{SB} = \frac{OM}{SO}$

$\Rightarrow \frac{BD}{SB} = \frac{AC}{SA} = \frac{AC+BD}{SB+SA} \quad (1)$

$\left.\begin{matrix} SOM \\ SAC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{OM}{SO} = \frac{AC}{SA}$

ម្យ៉ាងទៀត $SO = SB + OB$

$SO = SA - AO$

$SO = \frac{SA+SB}{2}$

(1) ក្លាយជា $\frac{BD}{SB} = \frac{AC}{SA} = \frac{R+r}{2SO} = \frac{R+r}{2SO}$

ហេតុនេះ $\frac{R+r}{2SO} = \frac{OM}{SO} \Rightarrow OM = \frac{R+r}{2} \Rightarrow M \in C\left(O, \frac{R+r}{2}\right)$

(5) វិធីគុណស្ពាន

ក) $\xleftarrow{3/1}$ $\xrightarrow[1]{}$ ស្ពានចំណាយ $3+1=4$

3	1 6 8 12
12, 8	1 3 6
12 8 6	1 3
1 3 6 8 12	បញ្ជូនគ្នាទាំងអស់ [illegible]

ខ) $\xleftarrow{12/8}$ $\xrightarrow[3]{}$ ស្ពានចំណាយ $12+3=15$

គ) $\xleftarrow{6/1}$ $\xrightarrow[1]{}$ ស្ពានចំណាយ $6+1=7$

ឃ) $\xleftarrow{3/1}$ ស្ពានចំណាយ 3

ចំណាយសរុប $8+7+15+14 = 29$ នាទី

សិស្សកែមិនបាន [illegible]
[illegible] ពិន្ទុ 20 នៃ 0

9

លើកទី1	1/3 ←	3+1 = 4	1 3 6 8 12
	1 →		
2	6/12 ←	12 + 3 = 15	1 6 8 12
	3 →		
3	1/8 ←	8 + 1 = 9	1 3 8
	1 →		1 3
4	3/1 ←	3	

31 mn. (16p)

32 mn. (12p)

34 mm ↗ (5p)

29 mm. (20p)

ហត្ថលេខា ...

2003

3.ទី I

ប្រឡងជ្រើសរើស សិស្សពូកែ ចូលរៀនថ្នាក់ពិសេស
ផ្នែកអន្តរសិក្សាវិទ្យាល័យ គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា
ថ្នាក់ទី៩ និង ទី១២ ឆ្នាំសិក្សា២០០២-២០០៣

~~*~*~*~*~*

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី 12</u> (ថ្ងៃទី 28-05-03)

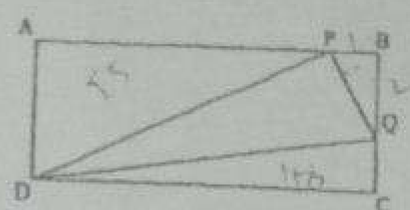
រយៈពេល 3 ម៉ោង - ពិន្ទុ 100

1.-(ពិន្ទុ ០៥) មាន $f(x)=2x+1$ និង $g[f(x)]=x^2+3x+1$ ។ គណនា $g(3)$ ។

2.-(ពិន្ទុ ០៥) គណនា $\sqrt{9+\sqrt{80}}-\sqrt{9-\sqrt{80}}$ ។

3.-(ពិន្ទុ 10) m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{4}{7}$ ។ គណនា m^2+n^2 ។

4.-(ពិន្ទុ 10) ក្នុងរូបខាងក្រោម $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ហើយ $PB=1$, $BQ=2$ ។ ដោយដឹងថា ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ APD ស្មើ 35 និងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ CQD ស្មើ 48 ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ PDQ ។



5.-(ពិន្ទុ 10) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n , ចំនួន $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

6.-(ពិន្ទុ 20) គេអោយ $U_0=1$, $U_1=2$ និង $U_{n+1}=\frac{U_n^2+1}{U_{n-1}}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

ក/. គណនា U_2

ខ/. បង្ហាញថា $U_{n+1}=3U_n-U_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

7.-(ពិន្ទុ 20) គេឧបមាថា $x^2+x+1=0$ ។ គណនា $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}}$ ។

8.-(ពិន្ទុ 20) ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំង 3 ជាមុំស្រួច ហើយ $\hat{B}=60^\circ$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ពុះមុំមួយ ដែលផ្គុំដោយកំពស់គូសពី A និង C កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

អត្រាកំណែប្រលងសិស្សពូកែ

ថ្នាក់ប្រទេសនៅកំពត 28/5/03

2003(I)

វិញ្ញាសាទី1

① គណនា $g(3)$

$f(x) = 2x+1 = 3$ នោះ $x = 1$

$g(3) = 1+3+1 = 5$

② គណនា $\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$

តាង $x = \sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}}$

$x > 0$ ព្រោះ: $\sqrt{9+\sqrt{80}} > \sqrt{9-\sqrt{80}}$

$x^2 = 16$ នោះ: $x = 4$

ឬ $\sqrt{9+\sqrt{80}} = 2+\sqrt{5}$

$\sqrt{9-\sqrt{80}} = -2+\sqrt{5}$ $(2-\sqrt{5}<0)$

នោះ: $\sqrt{9+\sqrt{80}} - \sqrt{9-\sqrt{80}} = 4$

③ គណនា m^2+n^2

មាន $\frac{1}{m}+\frac{1}{n} = \frac{4}{7}$ នោះ $\begin{cases} m > \frac{7}{4} \\ n > \frac{7}{4} \end{cases}$

ដោយ m, n គត់ : $m \geq 2; n \geq 2$

យើងបាន: $\begin{cases} n = \dfrac{7m}{4m-7} = \dfrac{7}{4-\frac{7}{m}} \quad (1) \\ m = \dfrac{7n}{4n-7} = \dfrac{7}{4-\frac{7}{n}} \quad (2) \end{cases}$

បើ $m = 2$; (1) នាំឲ្យ $n = 14$

បើ $m > 2$; $\frac{1}{n} = \frac{4}{7} - \frac{1}{m} > \frac{1}{14}$

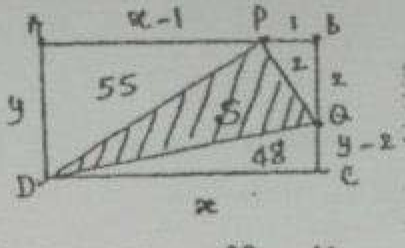
$2 < n < 14$

ចំពោះ $2 < n < 14$; តាម (2) : m មិនគត់

$n = 2$ នោះ: $m = 14$ ដូចគ្នានឹង $m = 2$ ដែរ

ដូចនេះ: $m^2+n^2 = 2^2+14^2 = 200$

④



តាង $AB = x$; $AD = y$

ក្រឡាផ្ទៃ ΔAPD : $\frac{1}{2}y(x-1) = 55$

ក្រឡាផ្ទៃ ΔCDQ : $\frac{1}{2}x(y-2) = 48$

គេទាញបាន : $x = 12$; $y = 10$

ក្រឡាផ្ទៃ PDQ គឺ: $S = 12\times10-55-48-2$

$S = 15$ ឯកតាផ្ទៃ.

⑤ ស្រាយថា $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ ជាចំនួនគត់

តាង $E = \frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$

$6E = n(n+1)(n+2)$

. $n; n+1; n+2$ ជាចំនួនគត់តគ្នា នោះ: មានយ៉ាងតិច ១ ជាចំនួនគូ

ដូចនេះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 2$

. $n(n+1)(n+2) \vdots 3$ ព្រោះ:

បើ $n \equiv 0 \pmod 3$ នោះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 3$

បើ $n \equiv 1 \pmod 3$ នោះ: $(n+2) \vdots 3$

បើ $n \equiv 2 \pmod 3$ នោះ: $(n+1) \vdots 3$

ដូចនេះ: $n(n+1)(n+2) \vdots 6$

ឬ $6E \vdots 6$ នោះ: E ជាចំនួនគត់

សម្រាយទី១: តាង $f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

បើ $n=1$ $\quad f(1)=\frac{1.2.3}{6}=1\in N$ ពិត

$n=2$ $\quad f(2)=\frac{2.3.4}{6}=4\in N$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ k គឺ $k(k+1)(k+2)\vdots 6$ $(k\in N)$ យើងនឹងស្រាយថា ពិតដល់ $(k+1)$

$$f(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{3(k+1)(k+2)}{6}$$

ដោយ $k(k+1)(k+2)\vdots 6$

ត្រូវស្រាយថា $\frac{3(k+1)(k+2)}{6}$ ជាចំនួនគត់

បើ $(k+1)(k+2)\vdots 2$

- បើ k គូ នោះ $(k+2)$ គូ នោះ $(k+1)(k+2)\vdots 2$
- បើ k សេស នោះ $(k+1)$ គូ នោះ $(k+1)(k+2)\vdots 2$

ដូចនេះ: $f(k+1)$ ពិត .

សរុបមក $f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ជាចំនួនគត់

6) ក) គណនា u_2: $\quad u_0=1$; $u_1=2$

$n=1$: $\quad u_2=\frac{u_1^2+1}{u_0}=\frac{2^2+1}{1}=5$

ខ) បង្ហាញថា $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$ (ក្រោ)

$u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$ នោះ $u_{n+1}\cdot u_{n-1}=u_n^2+1$

ឬ $u_{n+1}\cdot u_{n-1}-u_n^2=1$

- $y_n=u_{n-1}\cdot u_{n+1}-u_n^2$ ជាស្វ៊ីតថេរ គ្រប់ $n\geq 1$ ដូចនេះ: $u_n\cdot u_{n+2}-u_{n+1}^2=u_{n-1}\cdot u_{n+1}-u_n^2=1$

ឬ $\frac{u_n+u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}$ គ្រប់ $n\geq 1$

- $z_n=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}$ ជាស្វ៊ីតថេរ គ្រប់ $n\geq 1$

$(z_1=z_2=\cdots=z_n)$

ចំពោះ: $n=1$, $z_1=\frac{u_0+u_2}{u_1}=\frac{1+5}{2}=3$

ដូចនេះ: $z_n=\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n}=z_1=3$

ឬ $\boxed{u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}}$

សម្រាយទី២: ស្រាយតាមកំណើន:

$u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$ ចំពោះ: $(n\geq 1)$

មាន $u_2=5=3.2-1=3u_1-u_0$ ពិត

ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ: $u_{k+1}=3u_k-u_{k-1}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា ពិតដល់ $n=k+1$

គឺ: $u_{k+2}=3u_{k+1}-u_k$

តាមសម្មតិកម្ម $u_{k+1}=\frac{u_k^2+1}{u_{k-1}}$

នោះ: $u_{k+1}\cdot u_{k-1}=u_k^2+1$

គុណអង្គនឹង $u_{k+1}\neq 0$ លើ $u_{k+1}=3u_k-u_{k-1}$

$$u_{k+1}^2=3u_k u_{k+1}-u_{k+1}u_{k-1}$$

$$=3u_k u_{k+1}-u_k^2-1$$

$$u_{k+1}^2+1=u_k(3u_{k+1}-u_k)$$

$$\frac{u_{k+1}^2+1}{u_k}=3u_{k+1}-u_k=u_{k+2}$$

ដូចនេះ: $u_{k+2}=3u_{k+1}-u_k$ ពិត

នោះ: $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$ $(n\geq 1)$

⑦ គណនា $x^{2003} + \frac{1}{x^{2003}}$

ដោយ $x^2+x+1=0$ នោះ $x+\frac{1}{x}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (-1)^2 = 1$

ឬ $x^2+\frac{1}{x^2} = -1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 1$ ឬ $x^3+\frac{1}{x^3}=2$ $(n=3)$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) = -2$ ឬ $x^4+\frac{1}{x^4}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) = 1$ ឬ $x^5+\frac{1}{x^5}=-1$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right) = 1$ ឬ $x^6+\frac{1}{x^6}=+2$ $(n=6)$

ជាទូទៅ $x^n+\frac{1}{x^n}=2$ កាលណា $n=3k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

$x^n+\frac{1}{x^n}=-1$ បើ $n=3k-2$ ឬ $n=3k-1$

$(k\in\mathbb{N}^*)$

នោះ $2003 = 668\times 3-1$ ជា $3k-1$

ដូចនេះ: $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}} = -1$

របៀបទី២: $x^2+x+1=0$ មានឫសៈ

$x_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

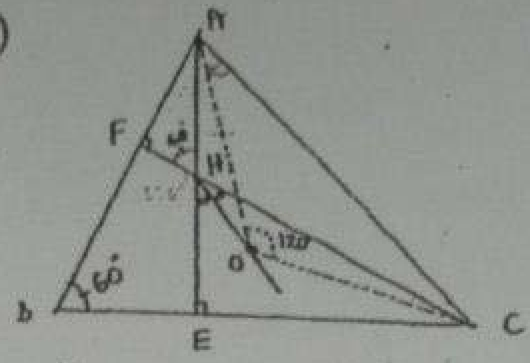
ករណី $x_1 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

តាម Demoivre : $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}} = -1$

ករណី $x_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

តាម Demoivre : $x^{2003}+\frac{1}{x^{2003}} = -1$

⑧



យក H ជាប្រសព្វកំពស់ [AE] និង [CF]

O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ Δ ABC

$\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 120°$ (មុំផ្ចិតនិងមុំចារឹក)

- ចតុកោណ BEHF ចារឹកក្នុងរង្វង់:

$\widehat{EHF} = 180° - \widehat{B} = 180° - 60° = 120°$

$\widehat{AHC} = \widehat{EHF} = 120°$

ដូចនេះ: $\widehat{AHC} = \widehat{AOC} = 120°$

នាំឲ្យ A ; H ; O ; C ស្ថិតលើរង្វង់តែមួយ

ហើយយើងបាន : $\widehat{OHC} = \widehat{OAC}$ (ស្កាត់ធ្នូ OC)

$\widehat{EHO} = \widehat{ACO}$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

ម្យ៉ាងទៀត Δ OAC សមបាត (ព្រោះ OA = OC)

នោះ: $\widehat{OAC} = \widehat{ACO}$

ដូចនេះ: $\widehat{EHO} = \widehat{OHC}$ មានន័យថា

(HO) ជាបន្ទាត់ពុះ: ∠EHC ។

ថ្នាក់ប្រទេស. 2003

3.ទី II

ឈ្មោះ សម្រាំ

ប្រឡងជ្រើសរើស សិស្សពូកែ ទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និង រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី៩ និង ទី១២ ឆ្នាំសិក្សា២០០២-២០០៣

~~*~*~*~*~*

<u>វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី 12</u> (ថ្ងៃទី 30-05-03)

រយៈពេល 3 ម៉ោង - ពិន្ទុ 100

1.-(ពិន្ទុ 05) x និង y ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+3xy+y^2=60$ ។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ xy ។

2.-(ពិន្ទុ 20) គេអោយ n ចំណុចនៅក្នុងប្លង់តែមួយ និងគ្មាន 3 ចំណុចណាមិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ N ជាចំនួនអង្កត់ដែលភ្ជាប់ពីរៗចំណុច ។

ក. តើមានឬទេដែល $N=n$, $N=3n$? បើមានចូរបញ្ជាក់តម្លៃនៃ n រួចរៀបបង្ហាញក្នុងករណីនីមួយៗ ។

ខ. ជាទូទៅ តើមានចំណុចប៉ុន្មានដែល $N=kn$? ។

3.-(ពិន្ទុ 25) k ជាចំនួនគត់ដែល $k\ge 2$ ។ ស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_0=x_1=1$ និង $x_{n+1}=\frac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ ចំពោះ $n\ge 1$ ។

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\ge 2$ ស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

4.-(ពិន្ទុ 25) ក្នុងឆ្នាំនេះ សុខបានប្រលងតែសគណិតវិទ្យា 4 លើក ។ ពិន្ទុអតិបរមានៃការប្រលងមួយលើកៗស្មើ 100 ។ ពិន្ទុដែលសុខបានទទួលសុទ្ធតែមានលេខ 2 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗខុសពី 0 ហើយពិន្ទុទាំង 4 លើកមានលេខខុសៗគ្នាទាំង 8 ។ មធ្យមភាគនៃពិន្ទុទាំង 4 លើករបស់សុខ ស្មើនឹងមធ្យមភាគនៃពិន្ទុនីមួយៗត្រលប់លេខ (ឧទាហរណ៍ : ពិន្ទុ 94 ត្រលប់លេខទៅជា 49) ហើយមធ្យមភាគនេះជាចំនួនគត់ដែលលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗខុសពីលេខទាំង 8 នៃពិន្ទុទាំង 4 លើក ។

តើមធ្យមភាគនៃពិន្ទុរបស់សុខស្មើប៉ុន្មាន ? ចូរអោយឧទាហរណ៍មួយនៃពិន្ទុទាំង 4 របស់សុខ ។

5.-(ពិន្ទុ 25) ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំ B ជាមុំស្រួច ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A ជួបជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ D ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[AC]$ ចន្លោះ A និង C ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle BPD < \angle DPC$ ។

5

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាទី២ 2003 (II)

ឈ្មោះ សៀងសាក់

① រកតម្លៃធំបំផុតនៃ xy :

មាន $x^2+3xy+y^2=60$

$$(x-y)^2+5xy=60$$

$$5xy=60-(x-y)^2$$

$$xy=12-\frac{(x-y)^2}{5}\le 12$$

ដូចនេះ $xy=12$ កាលណា $x=y$ នោះ xy មានតម្លៃធំបំផុត $\boxed{12}$

② ក) ស្រាយបញ្ជាក់ $N=n$; $N=2n$

- ចំនួនចំណុច ចំនួនអង្កត់

ពីចំណុចមួយៗ ទៅចំណុចផ្សេងទៀត មាន $(n-1)$ អង្កត់

និងមាន n ចំណុច គេបាន ចំនួនអង្កត់ $N=\frac{(n-1).n}{2}$

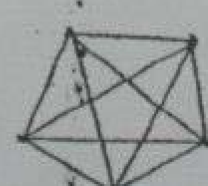
ព្រោះ អង្កត់នីមួយៗ ត្រូវបានរាប់ពីរដង

សិក្សាតាមតារាង :

ចំនួន	ចំនួនអង្កត់	ផលបូក
2	1	1
3	3	$2+1=\frac{2(2+1)}{2}$
4	6	$3+2+1=\frac{3(3+1)}{2}$
5	10	$4+3+2+1=\frac{4(4+1)}{2}$
⋮	⋮	- - - - -
n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$(n-1)+(n-2)+\dots+1=\frac{(n-1)n}{2}$

- ករណី $N=n$ នោះ $\frac{(n-1)n}{2}=n$ នោះ $n=3$

- ករណី $N=2n$ នោះ $\frac{(n-1)n}{2}=2n$ នោះ $n=5$



ខ) ចំនួនចំណុចដែល $N=kn$

$$\frac{(n-1)}{2}n=kn \quad \text{នោះ: } n=2k+1$$

③ បង្ហាញថា x_n ជាចំនួនគត់ ចំពោះគ្រប់ $k \geq 2$

ដោយ $x_0 = x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ $(n \geq 1)$

គេបាន: $x_2 = \frac{1^k+1}{1} = 2$ ជាចំនួនគត់

$x_3 = \frac{2^k+1}{1} = 2^k+1$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

ឧបមាថា $x_1 ; x_2 ; x_3 , \dots , x_n$ ជាចំនួនគត់

ស្រាយថា x_{n+1} ជាចំនួនគត់

គេមាន: $x_{n+1} = \frac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ និង $x_n = \frac{x_{n-1}^k+1}{x_{n-2}}$

នាំឲ្យ $x_{n+1} = \frac{(x_{n-1}^k+1)^k + x_{n-2}^k}{x_{n-2}^k \cdot x_{n-1}}$

តាង $N = (x_{n-1}^k+1)^k + x_{n-2}^k$

• $N \vdots x_{n-2}^k$ ព្រោះ x_n គត់ ឬ $\frac{x_{n-1}^k+1}{x_{n-2}}$ គត់

$\Rightarrow$ x_{n-1}^k+1 ចែកដាច់នឹង x_{n-2}

$(x_{n-1}^k+1)^k$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}^k

$(x_{n-1}^k+1)^k + x_{n-2}^k$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}^k (1)

• $N \vdots x_{n-1}$ ព្រោះ $x_{n-1}^k+1 \equiv 1 \pmod{x_{n-1}}$

នាំឲ្យ $(x_{n-1}^k+1)^k \equiv 1 \pmod{x_{n-1}}$

$(x_{n-1}^k+1)^k + x_{n-2}^k \equiv 1 + x_{n-2}^k \pmod{x_{n-1}}$

ដែល $x_{n-1} = \frac{x_{n-2}^k+1}{x_{n-3}}$ នាំឲ្យ $x_{n-1} \cdot x_{n-3} = x_{n-2}^k+1 \equiv 0 \pmod{x_{n-1}}$

ដូចនេះ: $N \equiv 0 \pmod{x_{n-1}}$ (2)

(1) និង (2) x_{n+1} ជាចំនួនគត់

④ ចូររកមធ្យមភាគ M :

តាងចំនួនទាំង4នោះ: $(10a+b)$; $(10c+d)$, $(10e+f)$, $(10g+h)$

$$M = \frac{(10a+b)+(10c+d)+(10e+f)+(10g+h)}{4} = \frac{(10b+a)+(10d+c)+(10f+e)+(10h+g)}{4}$$

$$M = \frac{11a+11b+11c+11d+11e+11f+11g+11h}{4.2}$$ (បូកចំនួនទាំង2 ចែក2)

$$M = \frac{11}{8}(a+b+c+d+e+f+g+h)$$

ដោយលេខទាំង8 ខុសគ្នា ហើយខុសពី0 យើងបាន:

$M = \frac{11}{8}(1+2+3+4+5+6+7+8+9-k)$ ដែល $1 \le k \le 9$; k គត់

$M = \frac{11}{8}(45-k)$ ដើម្បី M ជាចំនួនគត់ នោះ $(45-k) \vdots 8$

$1 \le k \le 9 \Rightarrow 36 \le 45-k \le 44$

ដូចនេះ: $45-k = 40 \Rightarrow k=5$

$\boxed{M = 55}$

ខ) រកចំនួនគត់:   បើ $M = 55$ ផលបូកចំនួនទាំង4 គឺ: $55 \times 4 = 220$

$$\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 4 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 220 \end{array}$$

មានន័យថា: ផលបូកលេខខ្ទង់ដប់ និង ផលបូកលេខខ្ទង់រាយស្មើ20 ដែល

ចំពោះ លេខខ្ទង់រាយនិងខ្ទង់10 ១គូៗ មានផលបូកស្មើ10:

$1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6$ (គ្មានលេខ5 ព្រោះ: ខុសពី លេខមធ្យមភាគ)

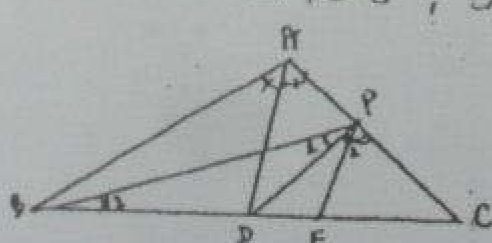
ដូចនេះ: ចំនួនទាំង4នោះគឺ: $(12, 98, 26, 84)$ ×

$\Rightarrow (13; 97; 74; 36)$; ...

⑤

13 ; 97 ; 64 ; 86 .

12 ; 98 ; 34 ; 76



⑤ ស្រាយបញ្ជាក់ $\hat{P}_1 < \hat{P}_2$

តាម $\angle B$ ស្រួច គេៈ $\widehat{PBC} < \widehat{ABC} < 90°$

នាំឲ្យ $\sin B_1 < \sin B$

ΔABC គេមាន: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (AD ពុះក្នុង: $\hat{A}$)

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

នាំឲ្យ $\dfrac{\sin C}{\sin B} = \dfrac{DB}{DC}$ (1)

តែបន្ទាត់ពុះ: (PE) នៃមុំ $\angle BPC$ ក្នុង ΔBPC

$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{EB}{EC}$ (បន្ទាត់ពុះ:)

$\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{\sin C}{\sin B_1}$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

នាំឲ្យ $\dfrac{\sin C}{\sin B_1} = \dfrac{EB}{EC}$ (2)

តែ $\sin B_1 < \sin B$ អោយ $\dfrac{\sin C}{\sin B_1} > \dfrac{\sin C}{\sin B}$

(1) និង (2) $\dfrac{EB}{EC} > \dfrac{DB}{DC}$

D ចែកអង្គត់ [BC] តាមផលធៀប តូចជាង , D នៅក្បែរ E

ដូចនេះ: E នៅចន្លោះ: D និង C

នាំឲ្យ $\hat{P}_1 < P_2$

សំគាល់ ដោយតាម $\sin \hat{P}_1 < \sin \hat{P}_2$ នាំឲ្យ $\hat{P}_1 < \hat{P}_2$ (ពិត)

ព្រោះ:មុំទាំង $\hat{P}_1$; $\hat{P}_2$ ស្រួចទាំងពីរ ។

2004

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា
វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើស គណិតវិទ្យា
ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៣-២០០៤
សម័យប្រឡង: ១១.៥.០៤
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ១១.៥.០៤ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(ពិន្ទុ១០) គេចែកការេមួយដែលមានជ្រុងប្រវែង 3 ឯកតា ជា ៩ ក្រឡាប៉ុនៗគ្នា ។

ចូរយកចំនួនគត់ពី 1 ដល់ 9 ទៅបំពេញក្នុងក្រឡាទាំង ៩ នោះដើម្បីអោយបានផលបូកចំនួនតាមជួរដេកនីមួយៗស្មើ 15 ផលបូកចំនួនតាមជួរឈរនីមួយៗស្មើ 15 ហើយផលបូកចំនួនតាមអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗស្មើ 15 ដែលក្រឡានីមួយៗមានចំនួនគត់តែមួយគត់ហើយខុសៗគ្នា ។

២-(ពិន្ទុ១០) កំណត់ឫសនៃសមីការ $x^{2004}+3x^{2002}-10x^{2000}=4x^{2003}-8x^{2001}$ នៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។

៣-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $1^n+8^n-3^n-6^n$ ចែកដាច់នឹង 10 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៤-(ពិន្ទុ១០) n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$u_{m+1}=v_{m+1}=a$

$u_{n+1}=v_{n+1}=b$

$u_{p+1}=v_{p+1}=c$ ដែល $a>0\,;\,b>0\,;\,c>0$ ។

បង្ហាញថា $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b})=1$ ។

៥-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ x ; y ; z ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2-8z=6$ ទេ ។

៦-(ពិន្ទុ២០) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$

គណនាតម្លៃនៃ $f(\sqrt[3]{2004})$ ។

៧-(ពិន្ទុ២៥) M ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើជ្រុង[AC] នៃត្រីកោណ ABC មួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា a^2 ។

r_1 និង r_2 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABM និង BCM ។

ក្នុងករណីដែល $r_1=r_2$ បង្ហាញថា $BM^2=a^2\cot\left(\dfrac{B}{2}\right)$ ។

(B ជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ត្រង់កំពូល B)

10

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា

វិញ្ញាសាទី១ សំរាប់ថ្ងៃទី ១១.៥.០៤

2004 (I)

១-(ពិន្ទុ១០)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

២-(ពិន្ទុ១០) កំណត់ឬសធំបំផុតនៃសមីការ :

គេបាន : $x^{2000}(x^4-4x^3+3x^2+8x-10)=0$

$x^{2000}(x^4-4-4x^3+8x+3x^2-6)=0$ ពិន្ទុ2

$x^{2000}[(x^2-2)(x^2+2)-4x(x^2-2)+3(x^2-2)]=0$

$x^{2000}(x^2-2)(x^2-4x+5)=0$

$x^{2000}=0$ នោះ $x=0$ ពិន្ទុ4

$x^2-2=0$ នោះ $x=\pm\sqrt{2}$

$x^2-4x+5=0$ មាន $\Delta'=-1$

សមីការមានឬសធំបំផុត $x=\sqrt{2}$ ពិន្ទុ4

៣-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $1^n+8^n-3^n-6^n$ ចែកដាច់នឹង 10 :

តាង $S=1^n+8^n-3^n-6^n$

គេបាន $S=(1-3)(1+3+\cdots+3^{n-1})+(8-6)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1})$

$S=(-2)(1+3+\cdots+3^{n-1})+(2)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1})$

$S=2p\ ;p=-1-3-\cdots-3^{n-1}+8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 6+\cdots+6^{n-1}$

ដូចនេះ S ចែកដាច់នឹង 2 (1) ពិន្ទុ4

ម្យ៉ាងទៀត :

$S=(1^n-6^n)+(8^n-3^n)$

$S=(1-6)(1+6+\cdots+6^{n-1})+(8-3)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1})$

$S=(-5)(1+6+\cdots+6^{n-1})+(5)(8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1})$

$S=5q\ ;q=-1-6-\cdots-6^{n-1}+8^{n-1}+8^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1}$

ដូចនេះ S ចែកដាច់នឹង 5 (2) ពិន្ទុ3

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{1^n+8^n-3^n-6^n \text{ ចែកដាច់នឹង } 10}$ ពិន្ទុ3

៦-(ពិន្ទុ១០) បង្ហាញថា $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = 1$

គេមាន:

$$a = u_1 + md = v_1 q^m$$

$$b = u_1 + nd = v_1 q^n$$

$$c = u_1 + pd = v_1 + q^p$$ ពិន្ទុ3

$$b - c = d(n-p)\ ;\ c - a = d(p-m)\ ;\ a - b = d(m-n)$$

គេបាន : $(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = (v_1 q^m)^{d(n-p)} (v_1 q^n)^{d(p-m)} (v_1 q^p)^{d(m-n)}$

$$= (v_1^{d(n-p+p-m+m-n)})(q^{d(mn-mp+np-mn+mp-np)})$$

$$= (v_1^0)(q^0) = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{(a^{b-c})(b^{c-a})(c^{a-b}) = 1}$ ពិន្ទុ7

៧-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ :

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេបាន :

$n = 4a + r$ ដែល a ជាចំនួនគត់ និង $r = 0;1;2;3$

$n^2 = 8(2a^2 + r) + r^2 = 8b + r^2$ ដែល $b = 2a^2 + r$ ជាចំនួនគត់ហើយ $r^2 = 0;1;4;9$

នេះបញ្ជាក់ថា $n^2 = 8m + s$ ដែល m ជាចំនួនគត់ និង $s = 0;1;4$ ពិន្ទុ5

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $x\ ;\ y$ គេបាន :

$x^2 = 8p + s$ ដែល p ជាចំនួនគត់ និង $s = 0;1;4$

$y^2 = 8q + t$ ដែល q ជាចំនួនគត់ និង $t = 0;1;4$

$x^2 + y^2 = 8(p+q) + (s+t) = 8z + y$ ដែល $z = p + q$ ជាចំនួនគត់ និង $v = 0;1;2;4;5$ ពិន្ទុ5

បានន័យថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $x;y;z$ គេបាន :

$x^2 + y^2 - 8z = 0$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 1$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 2$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 4$

ឬ $x^2 + y^2 - 8z = 5$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គ្មានចំនួនគត់ } x, y, z \text{ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ } x^2 + y^2 - 8z = 6 \text{ ទេ}}$ ពិន្ទុ5

៨-(ពិន្ទុ២០) គណនា $f(\sqrt[3]{2004})$:

តាង $A = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$ និង $B = \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}$

គេបាន : $A^3 + B^3 = x^3 - 3x$ ពិន្ទុ5

ដោយ $A + B = y$

$$A \cdot B = \sqrt[3]{\frac{(x^3-3x)^2-(x^2-1)^2(x^2-4)}{4}} = \sqrt[3]{\frac{4}{4}} = 1$$

$$y^3 = (A+B)^3$$

$$= A^3 + B^3 + 3AB(A+B)$$

$$y^3 = x^3 - 3x + 3y$$

$$y^3 - x^3 + 3x - 3y = 0$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2-3) = 0$$ ពិន្ទុ10

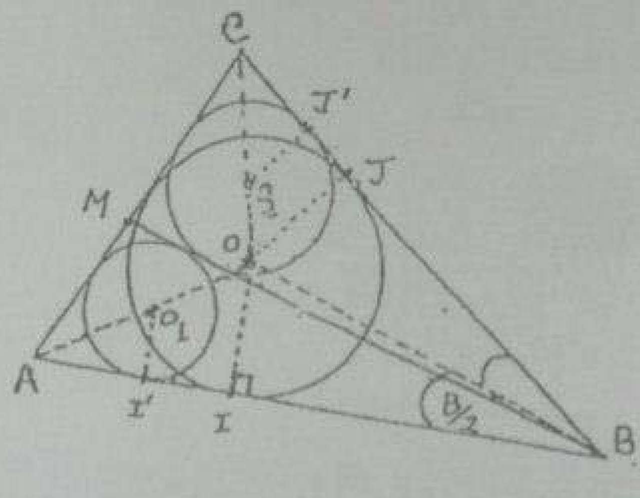
$y - x = 0$ គេបាន $y = x$

$y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$ មាន $\Delta = -3x^2 + 12 < 0$ ព្រោះ $x = \sqrt[4]{2004}$ →

គេបាន $y = x = \sqrt[4]{2004}$

ដូចនេះ $\boxed{f(\sqrt[4]{2004}) = \sqrt[4]{2004}}$ ពិន្ទុ5

ឃ-(ពិន្ទុ២៥) បង្ហាញថា $BM^2 = a^2 \cot\left(\frac{B}{2}\right)$:



ពិន្ទុ5

តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABM

s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ MBC

s និង p ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC

I និង I' ជាចំនុចប៉ះរវាង[AB] ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC និង ΔABM

J និង J' ជាចំនុចប៉ះរវាង[BC] ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC និង ΔMBC

គេបាន :

$$s = pr$$

$$s_1 = p_1 r_1$$

$$s_2 = p_2 r_2$$

ឈ្មោះ សាំងណា

$$s = s_1 + s_2 = p_1 r_1 + p_2 r_2$$

$pr = p_1 r' + p_2 r' = (p_1 + p_2) r'$ (1) ព្រោះ $r_1 = r_2 = r'$ ពិន្ទុ5

ម្យ៉ាងទៀត : $2p_1 + 2p_2 = 2p + 2BM$ ឬ $p_1 + p_2 = p + BM$

(1) អាចសរសេរ : $pr = (p + BM) r'$ ហើយ $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{p}{p + BM}$ (2)

$\Delta I'AO_1 \sim \Delta IAO : \dfrac{AI'}{AI} = \dfrac{r'}{r}$ ហើយ $\Delta J'CO_2 \sim \Delta JCO : \dfrac{CJ'}{CJ} = \dfrac{r'}{r}$ (3) ពិន្ទុ5

ក្នុងត្រីកោណABC គេមាន $p = AI + BJ + JC = AI + BC$

នោះ $AI = p - BC$

ក្នុងត្រីកោណABC គេមាន $p = CJ + AI + IB = CJ + AB$

នោះ $CJ = p - AB$

តាមរបៀបដូចគ្នា :

ក្នុងត្រីកោណABM គេមាន $AI' = p_1 - BM$

ក្នុងត្រីកោណMBC គេមាន $CJ' = p_2 - BM$

(3) : $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{p_1 - BM}{p - BC} = \dfrac{p_2 - BM}{p - AB} = \dfrac{p_1 + p_2 - 2BM}{2p - (BC + AB)}$

$\dfrac{r'}{r} = \dfrac{p + BM - 2BM}{AC}$ ព្រោះ $p_1 + p_2 = p + BM$ ហើយ $2p = AC + BC + AB$

$\dfrac{r'}{r} = \dfrac{p - BM}{AC}$ (4) ពិន្ទុ5

តាម (2) និង (4) :

$\dfrac{p}{p + BM} = \dfrac{p - BM}{AC}$ នាំអោយ $p \cdot AC = p^2 - BM^2$

នាំអោយ $BM^2 = p(p - AC) = p \cdot BI$ (5) ព្រោះ $BI = p - AC$

ក្នុងត្រីកោណកែងIBO : $BI = r \cot \widehat{OBI} = r \cot\left(\dfrac{B}{2}\right)$

(5) : $MB^2 = (pr) \cot\left(\dfrac{B}{2}\right) = a^2 \cot\left(\dfrac{B}{2}\right)$ ព្រោះ $a^2 = pr$

ដូចនេះ

$$\boxed{BM^2 = a^2 \cot\left(\frac{B}{2}\right)}$$ ពិន្ទុ5

មន្ទីរអប់រំយុវជន និងកីឡាខេត្ត

វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ គណិតវិទ្យា ប្រចាំខេត្ត

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៣-២០០៤

សម័យប្រឡង: ១១.៥.០៤

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ១៣.៥.០៤ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

ពូជាប់ប្រទេស
2004
វ.វិ II

១-(ពិន្ទុ១០) ធារី សុខ និង សៅ ជាបេក្ខជនសិស្សពូកែថ្នាក់ទី១២លើមុខវិជ្ជាផ្សេងៗគ្នា (គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង ភាសាខ្មែរ)។

(1): បើធារី ប្រឡងគណិតវិទ្យា នោះ សុខ ប្រឡងរូបវិទ្យា។

(2): បើធារី ប្រឡងភាសាខ្មែរ នោះ សៅ ប្រឡងរូបវិទ្យា។

(3): បើ សុខ មិនប្រឡងភាសាខ្មែរ នោះ សៅ ប្រឡងគណិតវិទ្យា។

តើបេក្ខជនណាប្រឡងមុខវិជ្ជាណា ?

ឈ្មោះតាមវិលាក់
ខ.ព្រះសីហនុ

២-(ពិន្ទុ១៥) ចូរបំពេញលេខអោយបានសមស្របត្រង់សញ្ញា * ក្នុងការគុណនាខាងក្រោម រវាងពីរចំនួន ដែលនៅខាងស្តាំនេះដោយបកស្រាយពន្យល់ផង។

$$\begin{array}{r} * \; * \; * \\ \times \quad * \; 2 \; * \\ \hline * \; * \; * \\ * \; * \; * \; * \quad \\ * \; 8 \; * \qquad \\ \hline * \; * \; 9 \; * \; 2 \; * \end{array}$$

៣-(ពិន្ទុ១៥) (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនដែលកំណត់ដោយ: $x_1=2003, x_2=2004$ និង $x_{n+1}=x_n(x_n-1)+2$ ចំពោះ $n\ge 2$

បង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2$ ។

៤-(ពិន្ទុ១៥) a, b, c, d ជាបួនចំនួនគត់ដែលចែកមិនដាច់នឹង 5 ។

m ជាចំនួនគត់មួយដែលធ្វើអោយ am^3+bm^2+cm+d ចែកដាច់នឹង 5 ។

បង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ដែលធ្វើអោយ dn^3+cn^2+bn+a ចែកដាច់នឹង 5 ដែរ ។

៥-(ពិន្ទុ២០) $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$ ជាចំនួនពិត ។

ក-បង្ហាញថា $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

បញ្ជាក់ថា វិសមភាពខាងលើក្លាយជាសមភាពកាលណា $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ ។

ខ-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលមានអញ្ញាត $x_1, x_2, \dots, x_{2004}$:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\cdots+\sqrt{1+x_{2004}}=2004\sqrt{\dfrac{2005}{2004}} & (1) \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_{2004}}=2004\sqrt{\dfrac{2003}{2004}} & (2) \end{cases}$$

៦-(ពិន្ទុ២៥) រង្វង់ពីរមានកាំ R និង r $(R>r)$ មានផ្ចិតរួមO ហើយស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។ M ជាចំនុចនឹងនៅលើរង្វង់តូច ហើយ B ជាចំនុចចល័តលើរង្វង់ធំ ។ បន្ទាត់(BM) ជួបរង្វង់ធំម្តងទៀតត្រង់ចំនុចC ។ បន្ទាត់(L) កែងនឹង(BM) ត្រង់M ។ បន្ទាត់(L) ជួបរង្វង់តូច ម្តងទៀតត្រង់A ។

ក-គណនា ផលបូក $S=BC^2+CA^2+AB^2$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង r ។

ខ-យក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ$[AB]$ ។ កំនត់សំណុំនៃចំនុច I ។

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា

វិញ្ញាសាទី២ សម័យថ្ងៃទី ១៣-៨-០៤

2004 (I)

១-(ពិន្ទុ១០) -បើ នារី ប្រលង គណិតវិទ្យា នោះ សុខ ប្រលង រូបវិទ្យា (តាម(1))

តាម(3) គេបាន សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យា ព្រោះសុខមិនប្រលងភាសាខ្មែរ ។ (1p)

គេបាន នារី និង សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យាតែមួយ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ + (2p)

ដូចនេះ នារីមិនប្រលងគណិតវិទ្យាទេ ។ = ពិន្ទុ3

-បើនារីប្រលងភាសាខ្មែរ នោះ សៅប្រលងរូបវិទ្យា (តាម(2)) ។

ក្នុងករណីនេះ សុខត្រូវប្រលងគណិតវិទ្យា (ក៏មិនប្រលងភាសាខ្មែរទេ) ហើយបណ្តាលអោយសៅប្រលង 1p

គណិតវិទ្យាដែរ (តាម(3)) ។ គេបាន សុខ និង សៅ ប្រលង គណិតវិទ្យាតែមួយ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ 2p

ដូចនេះ នារីមិនប្រលងភាសាខ្មែរទេ គឺ នារីច្បាស់ជាប្រលង រូបវិទ្យា ។ = ពិន្ទុ3

-បើសុខមិនប្រលងភាសាខ្មែរ គឺសុខប្រលងគណិតវិទ្យា (ព្រោះសល់តែខ្មែរនិងគណិត) ។ 1p

តែតាម(3) គេបាន សៅ ប្រលងគណិតវិទ្យាដែរ ជាករណីមិនអាចមាន ។ដូចនេះ សុខប្រលងភាសាខ្មែរ ។ 1p

សរុបមកគេបាន :

នារីប្រលង រូបវិទ្យា សុខប្រលងភាសាខ្មែរ ហើយ សៅប្រលង គណិតវិទ្យា

2p = ពិន្ទុ4

២-(ពិន្ទុ១៥)

-ដោយ 2×*** នៃតំណាងគុណ បានចំនួនដែលមានលេខបួនខ្ទង់ ហើយ(*) នៅតួគុណ គុណនឹង * * *
នៅតំណាងគុណ បានចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ នោះ(*) = 1 ។ គេបានតួគុណ = 121 ។ 2 + 1 + 2 = ពិន្ទុ5

-ដោយ 1 នៅខ្ទង់រយនៃតួគុណ គុណនឹង(*) នៅខ្ទង់ដប់នៃតំណាងគុណ បានលទ្ធផល ៨ នោះ (*) = 8 ។ ពិន្ទុ2

-ដោយផលគុណមានលេខខ្ទង់ដប់ស្មើ 2 នោះ(*) នៅខ្ទង់ឯកតា នៃតំណាងគុណត្រូវស្មើ 7 ។ ពិន្ទុ2

-ដោយ 2 គុណនឹង (*) នៅខ្ទង់រយនៃតំណាងគុណ បានចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់ ហើយខ្ទង់ឯកតាត្រូវបូកនឹង ៩ ផង បូក
និងលេខដែលត្រាទុកផងដើម្បីអោយបាន ១ នោះ(*) = 9 (គេសាកចាប់ពី 5 ដល់ ៩) ។ ពិន្ទុ2

ដូចនេះគេបាន :

$$
\begin{array}{r}
987 \\
\times\ 121 \\
\hline
987 \\
1974 \\
987 \\
\hline
119427
\end{array}
$$

ពិន្ទុ4

16

គ-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2$

តាង $S_n=(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_n^2+1)-1$

គេនឹងបង្ហាញថា $S_n=(x_{n+1}-1)^2$ ពិន្ទុ2

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $S_1=(x_1^2+1)-1=(2003)^2=(2004-1)^2=(x_2-1)^2$: ពិត

-ឧបមាថាទំនាក់ទំនងពិតដល់ $n=p$: $S_p=(x_{p+1}-1)^2$ ពិន្ទុ3

-ពិនិត្យចំពោះ $n=p+1$:

$$S_{p+1}=(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{p+1}^2+1)-1=\left[(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_p^2+1)-1+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$$ ពិន្ទុ2

$$=\left[S_p+1\right](x_{p+1}^2+1)-1=\left[(x_{p+1}-1)^2+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$$

$$=\left[(x_{p+1}^2+1)-2x_{p+1}+1\right](x_{p+1}^2+1)-1$$ ពិន្ទុ2

$$=\left[(x_{p+1}^2+1)^2-2x_{p+1}(x_{p+1}^2+1)+(x_{p+1}^2+1)\right]-1$$

$$=\left[(x_{p+1}^2+1)-x_{p+1}\right]^2=\left[x_{p+1}(x_{p+1}-1)+2-1\right]^2=(x_{p+2}-1)^2$$

$S_{p+1}=(x_{p+2}-1)^2$: ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះ $n=p+1$ ពិន្ទុ4

ដូចនេះ $S_n=(x_{n+1}-1)^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\,;\,n\geq 1$ ។

ដោយយក $n=2004$ គេបាន $\boxed{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{2004}^2+1)-1=(x_{2005}-1)^2}$ ពិន្ទុ2

ង-(ពិន្ទុ១៥) បង្ហាញថាមានចំនួនគត់ $n : dn^3+cn^2+bn+a$ ចែកដាច់នឹង 5 :

តាង : $A=am^3+bm^2+cm+d$

$B=dn^3+cn^2+bn+a$

A ចែកដាច់នឹង 5 តែ d ចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះ am^3+bm^2+cm ចែកមិនដាច់នឹង 5 (2p)

ដោយ $am^3+bm^2+cm=m(am^2+bm+c)$ ចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះគេបាន m ចែកមិនដាច់នឹង 5 ។

គេបាន $m=5q+r$ ដែល q ជាចំនួនគត់ ហើយ $r=1;2;3;4$ ។ (2p) = ពិន្ទុ4

គេសិក្សា $An^3-B=am^3n^3+bm^2n^3+cmn^3-dn^3-cn^2-bn-a$ (2p)

$$=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)$$

$$=(mn-1)(am^2n^2+amn+a+bmn^2+bn+cn^2)$$

$$B=An^3-(mn-1)(am^2n^2+amn+a+bmn^2+bn+cn^2)$$ (2p) = ពិន្ទុ4

ដើម្បីអោយ B ចែកដាច់នឹង 5 គេត្រូវតែជ្រើសរើសចំនួនគត់ n ដែលធ្វើអោយ $mn-1$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $m=5q+r\,;\,n=5p+s$ នោះគេបាន $mn-1=5k+rs-1$ ដែល $k=5pq+qs+pr$ (2p)

ដើម្បីអោយ $mn-1$ ចែកដាច់នឹង 5 លុះត្រាតែ $rs-1$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ (1p) = ពិន្ទុ3

ដោយ $1\leq r\leq 4$ នោះគេអាចរក s បាន តាមរបៀបដូចខាងក្រោម :

បើ $r=1$ នោះ $s=1$; $n=5p+1$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

បើ $r=2$ នោះ $s=3$; $n=5p+3$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

បើ $r = 3$ នោះ $s = 2$; $n = 5p + 2$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

បើ $r = 4$ នោះ $s = 4$; $n = 5p + 4$ ដែល p ជាចំនួនគត់ (1p)

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេអាចរកបាន } n \text{ ដែលធ្វើអោយ } B \text{ ចែកដាច់នឹង } 5}$ = ពិន្ទុ4

៥-(ពិន្ទុ១០) ក-បង្ហាញថា $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

-បើ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ នោះគេបាន $0 \le 0$: ពិត (1p)

-បើមាន $a_i \ne 0$ នោះ $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$ យើងគេបាន :

$(a_1x + b_1)^2 = a_1^2x^2 + 2a_1b_1x + b_1^2 \ge 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(a_2x + b_2)^2 = a_2^2x^2 + 2a_2b_2x + b_2^2 \ge 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

$(a_nx + b_n)^2 = a_n^2x^2 + 2a_nb_nx + b_n^2 \ge 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$ (2p) = ពិន្ទុ3

បូកអង្គនិងអង្គ :

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \ge 0 , \forall x \in \mathbb{R}$ (2p)

លុះត្រាតែ :

$\Delta' = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \le 0$ (3p)

ដូចនេះ $\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$ = ពិន្ទុ5

-ករណី $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n} = t$ គេបាន :

$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2$ (i) (1p)

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = t^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^2$ (ii) (1p)

តាម(i) និង(ii) :

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$$ = ពិន្ទុ2

ខ-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

ដែលគេមាន : $-1 \le x_i \le 1 \ , i = 1, 2, \ldots, 2004$

(1) សមមូល $(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 = (2004)(2005)$ (1p)

$(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 \le (1 + 1 + \cdots + 1)(1 + x_1 + 1 + x_2 + \cdots + 1 + x_{2004})$ (1p)

$(\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{2004}})^2 \le (2004)(2004 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004})$

$(2004)(2005) \le (2004)(2004 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004})$

$1 \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004}$ (3) (1p) = ពិន្ទុ3

(2) សមមូល $(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{2004}})^2 = (2004)(2003)$ (1p)

$(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{2004}})^2 \le (2004)(2004 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{2004})$

លំ.③ បើប្រើការ អំព្យួ ប្រសិទ្ធភាព ចំលើយ ពិតជាស្រួល

$$(x_1^2+1) - 1 = (2003)^2 = (2004-1)^2 = (x_2-1)^2$$

$$\vdots$$

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_{2004}^2+1)^2 = (x_{2005}-1)^2$$

រៀ.ក្រ.ស៊ីហាអ៊ី

ឈ្មោះការម៉ែលាំ

ប៊.វ

$(2004)(2003) \le (2004)(2004 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{2004})$ (1p)

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} \le 1$ (4) (1p) =

តាម (3) និង (4) : $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} = 1$ (5) (1p)

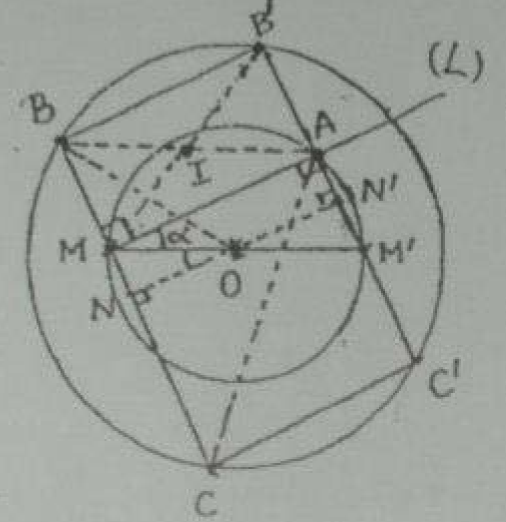
វិសមភាពក្លាយជាសមភាព លុះត្រាតែ : $\sqrt{1+x_1} = \sqrt{1+x_2} = \cdots = \sqrt{1+x_{2004}}$ (1p)

ហើយ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2004}$ (1p)

(5) អាចសរសេរ : $2004x_1 = 1$ ហើយ $x_1 = \frac{1}{2004}$ (1p)

ដូចនេះ $\boxed{x_1 = x_2 = \cdots = x_{2004} = \frac{1}{2004}}$ = ពិន្ទុ4

២-(ពិន្ទុ២៥) ក -គណនាផលបូក S :



(គូររូបតាមលក្ខខណ្ឌ = ពិន្ទុ5

តាង : [MM'] ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់តូច ។ $O\hat{M}A = \alpha$ ហើយ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ [BC] ។ (2p)

គេបាន $S = BC^2 + CA^2 + AB^2 = (BM + MC)^2 + (MC^2 + MA^2) + (MB^2 + MA^2)$ (1p)

$S = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MB \cdot MC)$ (1) = ពិន្ទុ3

-ក្នុងត្រីកោណកែង AMM' : $MA = 2r\cos\alpha$ (1p)

-ក្នុងត្រីកោណកែង NOB & NOM : $ON = r\cos\alpha$; $MN = r\sin\alpha$ (1p)

$MB = NB - NM = \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} - r\sin\alpha$ (1p) = ពិន្ទុ3

- ម្យ៉ាងទៀត $MC = MN + NC = MN + BN = r\sin\alpha + \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha}$ (2p)

-គេបាន $MB \cdot MC = R^2 - r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = R^2 - r^2$ (1p) ពិន្ទុ3

(1) អាចសរសេរ :

$S = 2\left[4r^2\cos^2\alpha + (\sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha} - r\sin\alpha)^2 + (r\sin\alpha + \sqrt{R^2 - r^2\cos^2\alpha})^2 + R^2 - r^2\right]$ (2p)

$S = 2\left[4r^2\cos^2\alpha + 2(R^2 - r^2\cos^2\alpha) + 2r^2\sin^2\alpha + R^2 - r^2\right]$ (2p)

$\boxed{S = 6R^2 + 2r^2}$ = ពិន្ទុ4

ខ-កំណត់សំណុំចំណុច I :

តាម A គូស $(B'C') \parallel (BC)$ ហើយជួបរង្វង់ត្រង់ B' & C' ។ (ON) ជួប $(B'C')$ ត្រង់ N' ។ (1p)

គេបាន $\Delta NOM \cong \Delta N'OM'$ តាមករណីទី2

នាំឲ្យ : $ON = ON'$ ហើយ $BC = B'C'$ (1p)

ដោយ $(B'C') \parallel (BC)$ & $BC = B'C'$ នោះ $BCC'B'$ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ (1p)

ដូចនេះ $BCC'B'$ ជាចតុកោណកែង ។ (1p) = ពិន្ទុ4

គេបាន $MAB'B$ ជាចតុកោណកែង ព្រោះវាមានមុំកែង3 ហើយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[MB']$ ដែរ ។

គេបាន : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB'}$

M ជាចំណុចនឹង ហើយ B' ចល័តលើរង្វង់ } (1p)

ដូចនេះ

$\boxed{\text{សំណុំចំណុច I គឺជារង្វង់រូបភាពនៃរង្វង់ } (O;R) \text{ តាមបំលែងចំណុច } H(M;\tfrac{1}{2})}$ (2p) = ពិន្ទុ3

សិស្សម្នាក់ ៖ តាង H កណ្តាល OM (O នឹង M នឹង) (1p)

នាំឲ្យ H នឹង .

HI ជាបាតមធ្យម $\Delta\, OMB'$

$HI = \frac{OB'}{2} = \frac{R}{2}$ ថេរ (1p)

ដូចនេះ: សំណុំចំណុច I ស្ថិតលើរង្វង់ផ្ចិត H កាំ (1p)

$HI = \frac{R}{2}$. =(3p)

ផ្ទាល់ប្រលង 2005

3.វិ I

ឈ្មោះ [illegible]

[illegible]

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែ [illegible]

[illegible] គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ ដល់ទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៤-២០០៥

សម័យប្រឡង : ០៥-០៥-០៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ ពេលព្រឹក ថ្ងៃទី ០៥-០៥-០៥

(រយៈពេល ៣ ម៉ោង ពិន្ទុ ១០០)

១-(៥ពិន្ទុ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k គេកំណត់ $k!=1\times 2\times\cdots\times k$ ។

គណនាផលបូក $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $n!>3^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n\geq 7$ ។

៣-(១៥ពិន្ទុ) $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$ ជាផលបូក k តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដែលមាន $u_1\neq 0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$\frac{S_m}{S_n}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $m\neq n$ ។

គណនា $\frac{u_{m+2004}}{u_{n+2005}}$ ជាអនុគមន៍នៃ m និង n ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $p\geq 2$ ដែល $(p-1)!+1$ ចែកដាច់នឹង p ។

បង្ហាញថា p ជាចំនួនបឋម ។

៥-(១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ និង $a>0$ ។

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ខួបនៅលើ $[0;+\infty[$ ។

៦-(២០ពិន្ទុ) សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសជាចំនួនពិតមួយយ៉ាងតិច ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត ។

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ a^2+b^2 ។

៧-(២០ពិន្ទុ) ចំណុច O មួយស្ថិតនៅលើជ្រុង [AB] នៃចតុកោណប៉ោង ABCD មួយ ។ រង្វង់ផ្ចិត O កាំ r មួយប៉ះជ្រុង [BC];

[CD] និង [DA] នៃចតុកោណ ។ ចតុកោណ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយផ្សេងទៀត ។

បង្ហាញថា AD+BC=AB ។

2005

II

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៤-២០០៥

សម័យប្រឡង: ០៥-០៥-០៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៧-០៥-០៥

(រយៈពេល ៣ ម៉ោង ពិន្ទុ ១០០)

១-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $F=\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

២-(១០ពិន្ទុ) រកចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលមាន 6 ជាលេខខ្ទង់ឯកតា ហើយបើគេប្តូរលេខ6 ទៅខាងមុខគេបំផុតវិញ នោះគេនឹងបានចំនួនថ្មីដែលស្មើ 4 ដងនៃចំនួនដើមនោះ ។

៣-(១៥ពិន្ទុ) កំណត់គ្រប់អនុគមន៍លេខ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=4xy(x^2-y^2)$ ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) A និង B ជាចំណុចនឹងនៅក្នុងប្លង់(P) មួយ ។ គេបន្លាយ$[AB]$ខាងចំណុចB ឱ្យបាន $BC=\dfrac{AB}{k^2-1}$ ដែល$k>1$ ។

M ជាចំណុចចល័តក្នុងប្លង់ (P) ដោយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\dfrac{MA}{MB}=k$ ។ កំណត់សំណុំនៃចំណុច M ។

៥-(២៥ពិន្ទុ) p ជាចំនួនបឋម ហើយ $C(p;x)$ ជាចំនួនបន្សំនៃ p ធាតុដែលគេអាចចាប់យក ម្តងx ធាតុ $(x\le p)$ ។

ក- បង្ហាញថា $C(p;x)$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0<x<p$ ។

ខ- បង្ហាញថា $(a+b)^p-a^p-b^p$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និងb ។

គ- បង្ហាញថា a^p-a ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a ។

៦-(២៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ហើយយកតម្លៃលើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

f ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈទាំងបួនខាងក្រោម :

(1) : $f(2)=0$

(2) : $f(3)>0$

(3) : $f(9999)=3333$

(4) : ចំពោះគ្រប់ $m\,;n$ គេបាន : $\left|\begin{array}{l} f(m+n)=f(m)+f(n) \\ \text{ឬ } f(m+n)=f(m)+f(n)+1 \end{array}\right.$ ។

ក- កំណត់ $f(1)$ និង $f(3)$ ។

ខ- បង្ហាញថា $f(3n)\ge n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n ។

គ- កំណត់ $f(2005)$ ។

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ 2005 (II)

សម័យថ្ងៃទី ០៤_០៩_០៥

១-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $F = \dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន :

ឧបមាថាមាន d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $21n+4$ & $14n+3$ នោះគេបាន :

$21n+4 = da \quad , a \in N$

$14n+3 = db \quad , b \in N$ ២ពិន្ទុ

$21n+4-(14n+3) = (a-b)d$

$7n+1 = (a-b)d$

$21n+3 = 3(a-b)d$ ២ពិន្ទុ

$21n+4-(21n+3) = ad-3(a-b)d$

$1 = (3b-2a)d$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $3b-2a$ ជាចំនួនគត់ នោះ $d|1$ គឺ $d=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{F \text{ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន}}$ ២ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ)

តាង $x = \overline{x_1x_2\cdots x_n}$ នោះ $\overline{x_1x_2\cdots x_n6}$ ជាចំនួនដែលស្វែងរក ២ពិន្ទុ

គេបាន $\overline{6x_1x_2\cdots x_n} = 4(\overline{x_1x_2\cdots x_n6})$

$6\times10^n + x = 4(10x+6)$ ១ពិន្ទុ

$2(10^n-4) = 13x$

ដោយ $(2;13)=1$ នោះ $13\,|\,(10^n-4)$ ១ពិន្ទុ

-បើ $n=1$ នោះ $10^n-4 = 10-4 = 6$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=2$ នោះ $10^n-4 = 10^2-4 = 96$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=3$ នោះ $10^n-4 = 10^3-4 = 996$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=4$ នោះ $10^n-4 = 10^4-4 = 9996$ ចែកមិនដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

-បើ $n=5$ នោះ $10^n-4 = 10^5-4 = 99996$ ចែកដាច់នឹង13 ១ពិន្ទុ

ករណីនេះគេបាន $x = \dfrac{2(99996)}{13} = 15384$ ហើយ $\boxed{\overline{x_1x_2\cdots x_n6} = 153846}$ ១ពិន្ទុ

៣-(១៥ពិន្ទុ) កំណត់គ្រប់អនុគមន៍លេខ g :

ដោយចែកគ្រប់អង្គនឹង x^2-y^2 : $\dfrac{g(x+y)}{x+y} - \dfrac{g(x-y)}{x-y} = 4xy$ ២ពិន្ទុ

តាង $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ នោះ $g(x) = xf(x)$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $f(x+y)-f(x-y) = 4xy \qquad (1)$ ១ពិន្ទុ

24

យក $x = x_0 + \frac{h}{2}$; $y = \frac{h}{2}$

(1) អាចសរសេរ $f(x_0+h) - f(x_0) = 4(x_0 + \frac{h}{2})(\frac{h}{2})$ ២ពិន្ទុ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h)$$ ៣ពិន្ទុ

$f'(x_0) = 2x_0$

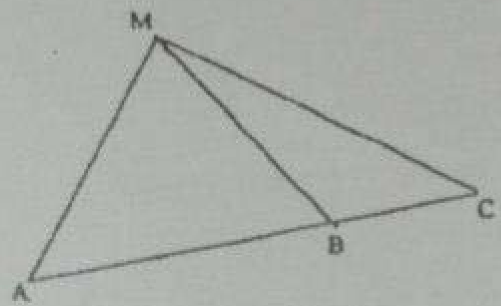
$f'(x) = 2x$ ១ពិន្ទុ

$f(x) = x^2 + c \quad (c \in R)$ ២ពិន្ទុ

$g(x) = x(x^2 + c) = x^3 + cx \quad (c \in R)$

$$\boxed{g(x) = x^3 + cx \ . \quad (c \in R)}$$ ២ពិន្ទុ

៦-(១៥ពិន្ទុ)



៣ពិន្ទុ

កំណត់សំណុំចំនុច M :

តាង $AB = a$ នោះ $AC = AB + BC = a + \frac{a}{k^2-1} = \frac{ak^2}{k^2-1}$ ២ពិន្ទុ

$\Delta CAM \ : MA^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM.CA.\cos C$ ២ពិន្ទុ

$\Delta CBM \ : MB^2 = CM^2 + CB^2 - 2CM.CB.\cos C$ ២ពិន្ទុ

តែ $MA^2 = k^2.MB^2$

$CM^2 + CA^2 - 2CM.CA.\cos C = k^2CM^2 + k^2CB^2 - 2k^2CM.CB.\cos C$ ២ពិន្ទុ

$$(1-k^2)CM^2 = -\left(\frac{k^2a}{k^2-1}\right)^2 + \frac{2k^2a}{k^2-1}CM.\cos C + k^2\frac{a^2}{(k^2-1)^2} - \frac{2k^2a}{k^2-1}CM.\cos C$$

$$CM^2 = \frac{(ka)^2}{(k^2-1)^2}$$ ២ពិន្ទុ

$$CM = \frac{ka}{k^2-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សំណុំចំនុច M គឺជារង្វង់ផ្ចិត C កាំ } \frac{ka}{k^2-1} \text{ ដែល } k > 1}$ ២ពិន្ទុ

៥-(២៥ពិន្ទុ) ក- បង្ហាញថា $C(p;x)$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ x ដែល $0 < x < p$:

$$C(p;x) = \frac{p!}{(p-x)!x!} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-x+1)}{x!}$$ ១ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p \mid (x!C(p;x))$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $0 < x < p$ និង p ជាចំនួនបឋម នោះ $(p, x!) = 1$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $p \mid x!C(p;x))$ និង $(p, x!) = 1$ នោះ $p \mid C(p;x)$

ដូចនេះ $\boxed{C(p;x) \text{ ជាពហុគុណនៃ } p \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \text{ ដែល } 0 < x < p}$ ២ពិន្ទុ

ខ-បង្ហាញថា $(a+b)^p - a^p - b^p$ ជាពហុគុណនៃ p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b :

$$(a+b)^p - a^p - b^p = C(p;0)a^p + C(p;1)a^{p-1}b + \cdots + C(p;p-1)ab^{p-1} + C(p;p)b^p - a^p - b^p$$ ២ពិន្ទុ

$$= C(p;1)a^{p-1}b + \cdots + C(p;p-1)ab^{p-1} = \sum_{x=1}^{p-1} C(p;x)a^{p-x}b^x$$ ២ពិន្ទុ

តាមសំរាយបញ្ជាក់ខាងលើ : $p \mid C(p;x)$ ចំពោះ $0 < x < p$

គេបាន $p \mid C(p;x)a^{p-x}b^x$ ចំពោះ $0 < x < p$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p \mid \sum_{x=1}^{p-1} C(p;x)a^{p-x}b^x$ ឬ $p \mid \left((a+b)^p - a^p - b^p\right)$

ដូចនេះ $\boxed{(a+b)^p - a^p - b^p \text{ ជាពហុគុណនៃ } p \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ } a \text{ និង } b}$ ២ពិន្ទុ

គ- បង្ហាញថា $a^p - a$ ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a :

-ចំពោះ $a = 0$: $0^p - 0 \equiv 0 \pmod p$: ពិត ២ពិន្ទុ

-ឧបមាថាទំនាក់ទំនងពិតដល់ $a = k$ គឺថា $k^p - k \equiv 0 \pmod p$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ $a = k+1$:

$A = (k+1)^p - (k+1) = ((k+1)^p - k^p - 1^p) + (k^p - k)$ ២ពិន្ទុ

តាមសំរាយ (ខ): $(k+1)^p - k^p - 1^p) \equiv 0 \pmod p$ ១ពិន្ទុ

តាមសម្មតិកម្មកំណើន : $k^p - k \equiv 0 \pmod p$ ១ពិន្ទុ

ទាញបាន : $A \equiv 0 \pmod p$

ដូចនេះ $\boxed{a^p - a \text{ ចែកដាច់នឹង } p \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ } a}$ ២ពិន្ទុ

៦-(២៥ពិន្ទុ)

ក- កំណត់ $f(1)$ និង $f(3)$:

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 0$ គេបាន $f(1) = 0$ ១ពិន្ទុ

ឬ $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) + 1 = 2f(1) + 1 = 0$ មិនអាចមាន ព្រោះ $f(1) \geq 0$ ១ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{f(1) = 0}$ ១ពិន្ទុ

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 0 + 0 = 0$ ១ពិន្ទុ

ឬ $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$ ១ពិន្ទុ

ដោយ $f(3) > 0$ នោះ $\boxed{f(3) = 1}$ ២ពិន្ទុ

ខ- បង្ហាញថា $f(3n) \ge n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n :

-ចំពោះ $n = 1$ $\quad f(3\times 1) = f(3) = 1$: ពិត ២ពិន្ទុ

-ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺថា $f(3k) \ge k$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ $n = k+1$:

$f(3(k+1)) = f(3k) + f(3) + \left|{}^{0}_{1}\right. = f(3k) + 1 + \left|{}^{0}_{1}\right. \ge k+1$: ពិត ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\boxed{f(3n) \ge n \text{ ចំពោះគ្រប់ } n \ge 1}$ ២ពិន្ទុ

គ-កំណត់ $f(2005)$:

បើ $f(3n) > n$ នោះ $f(3(n+1)) = f(3n) + f(3) + \left|{}^{0}_{1}\right. > \left|{}^{n+1}_{n+2}\right.$ គឺ $f(3(n+1)) > n+1$

គឺថា $f(3p) > p$ ចំពោះ $p > n$ ។ ២ពិន្ទុ

តែ $f(3\times 3333) = 3333$ & $f(3\times 1) = 1$ នោះ $f(3n) = n \quad ; \ n \le 3333$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ :

$f(2005) = f(3\times 668 + 1) = f(3\times 668) + f(1) + \left|{}^{0}_{1}\right. = 668 + \left|{}^{0}_{1}\right. \ge 668 \quad (1)$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត : $2005 = f(3\times 2005) = f((2005+2005)+2005) =$

$= f(2005+2005) + f(2005) + \left|{}^{0}_{1}\right. = f(2005) + f(2005) + \left|{}^{0}_{1}\right. + f(2005) + \left|{}^{0}_{1}\right. \ge 3f(2005)$

គឺ $f(2005) \le \dfrac{2005}{3} = 668 + \dfrac{1}{3} \qquad (2)$ ២ពិន្ទុ

តាម (1) និង (2) : $668 \le f(2005) \le 668 + \dfrac{1}{3}$

ដោយ $f(2005)$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ $\boxed{f(2005) = 668}$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៧ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៥

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី ស៊ាងលី

27

ទូទាំងប្រទេស
2006

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៥-២០០៦

សម័យប្រឡង: ០៥-០៥-០៦

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ០៥-០៥-០៦ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលគុណ $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2006^2}\right)\left(1-\frac{1}{2007^2}\right)$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) រង្វង់ផ្ចិត I មួយមានផ្ទៃក្រឡា $20\,cm^2$ ។ ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច មានផ្ទៃក្រឡា $8\,cm^2$ ហើយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត I ។ មុំផ្ចិត $A\hat{I}B=\alpha$; $B\hat{I}C=\beta$ និង $C\hat{I}A=\gamma$ ។

គណនា $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ ។

៣-(១០ពិន្ទុ) (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $x_1=1$ និង $x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+x_n}+x_n$ ។

កំណត់តួទី 2006 នៃស្វ៊ីត ។

៤-(១០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x\neq 0$ ដោយ $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=2x$ ។

គណនា $f(2006)$ ។

៥-(២០ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀប e^x និង $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$ ចំពោះ x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

៦-(២០ពិន្ទុ) ចំនុច M មួយស្ថិតនៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ យក I;J;K ជាចំណោលកែងនៃ M រៀងគ្នាទៅលើជ្រុង [BC];[CA];[AB] នៃត្រីកោណ ។

កំណត់ចំណុច M ដើម្បីឲ្យ $\left(\frac{BC}{MI}+\frac{CA}{MJ}+\frac{AB}{MK}\right)$ មានតំលៃអប្បបរមា ។

៧-(២០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

បង្ហាញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលសំណុំនៃពហុគុណរបស់ m ស្មើនឹង សំណុំនៃពហុគុណរួមរបស់ a និង b ។

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ 2006 (I)

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០៥.០៥.០៦

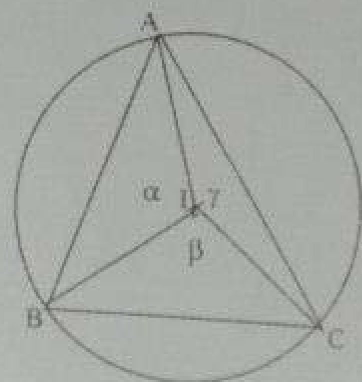
១-(១០ពិន្ទុ) គណនា ផលគុណ $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2006^2}\right)\left(1-\frac{1}{2007^2}\right)$:

$$P=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\frac{5^2-1}{5^2}\times\cdots\times\frac{2004^2-1}{2004^2}\times\frac{2005^2-1}{2005^2}\times\frac{2006^2-1}{2006^2}\times\frac{2007^2-1}{2007^2}$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}\times\cdots\times\frac{2003}{2004}\times\frac{2006}{2005}\times\frac{2005}{2006}\times\frac{2008}{2007}$$ ៤ពិន្ទុ

$$\boxed{P=\frac{1}{2}\times\frac{2008}{2007}=\frac{1004}{2007}}$$ ៤ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) គណនា $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$:



២ពិន្ទុ

តាង R ជាកាំរង្វង់ផ្ចិត I ។

គេបាន $S_{ABC}=S_{IAB}+S_{IBC}+S_{ICA}$

$$=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha+\frac{1}{2}R^2\sin\beta+\frac{1}{2}R^2\sin\gamma$$ ២ពិន្ទុ

$$8=\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{16}{R^2}\qquad(1)$$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $S_{(I)}=\pi R^2=20$ ហើយ $R^2=\frac{20}{\pi}$ ២ពិន្ទុ

(1): $\boxed{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{16}{R^2}=\frac{4\pi}{5}}$ ២ពិន្ទុ

៣-(១០ពិន្ទុ) កំណត់តួទី 2006 នៃស៊ីត

-គេមាន $x_1=1=\sqrt{1}$ ១ពិន្ទុ

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+1=\sqrt{2}$$ ១ពិន្ទុ

-ឧបមាថា $x_k=\sqrt{k}$ ៧ពិន្ទុ

-សិក្សាចំពោះ x_{k+1} :

29

$$x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+x_k}+x_k=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+\sqrt{k}=\sqrt{k+1}$$ ៣ពិន្ទុ

បានន័យថា $x_n=\sqrt{n}$ ចំពោះ $n\ge 1$

ដូចនេះ $\boxed{x_{2006}=\sqrt{2006}}$ ២ពិន្ទុ

៤-(១០ពិន្ទុ) គណនា $f(2006)$:

យក $x=\frac{1}{2006}$ គេបាន $f(2006)+2006f(-\frac{1}{2006})=\frac{2}{2006}$ ២ពិន្ទុ

$f(2006)=-2006f(-\frac{1}{2006})+\frac{2}{2006}$ (1) ២ពិន្ទុ

យក $x=-2006$ គេបាន $f(-\frac{1}{2006})-\frac{1}{2006}f(2006)=2(-2006)$

$f(-\frac{1}{2006})=\frac{1}{2006}f(2006)+2(-2006)$ ៣ពិន្ទុ

$$(1): f(2006)=-2006\left[\frac{1}{2006}f(2006)+2(-2006)\right]+\frac{2}{2006}=-f(2006)+2(2006)^2+\frac{2}{2006}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(2006)=2006^2+\frac{1}{2006}}$ ៣ពិន្ទុ

៥-(២០ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀប e^x និង $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$:

យកអនុគមន៍ $f_n(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$ ៣ពិន្ទុ

- ចំពោះ $n=1$, $f_1(x)=e^x-(1+x)$

$f_1'(x)=e^x-1>0$ ចំពោះ $x>0$

$f_1(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x>0$ ហើយ $f_1(0)=0$

ដូចនេះ $f_1(x)>0$ ចំពោះ $x>0$ ៣ពិន្ទុ

- ឧបមាថា $f_k(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$ ចំពោះ $x>0$ ៣ពិន្ទុ

- សិក្សាករណី $n=k+1$:

$f_{k+1}(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$ ២ពិន្ទុ

- $f'_{k+1}(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)=f_k(x)>0$ ចំពោះ $x>0$ ២ពិន្ទុ

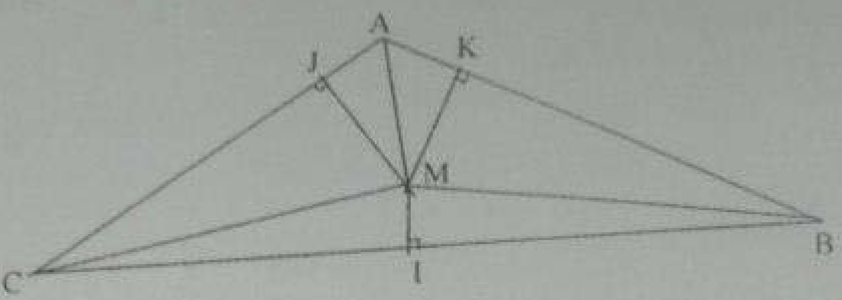
$f_{k+1}(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x>0$ ២ពិន្ទុ

$f_{k+1}(x)>f_{k+1}(0)=0$ ២ពិន្ទុ

នេះបញ្ជាក់ថា $f_n(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!},\ x>0,\ n\ge 1}$ 30 ៣ពិន្ទុ

៦-(២០ពិន្ទុ) កំណត់ចំណុច M ដើម្បីឱ្យ $\left(\frac{BC}{MI}+\frac{CA}{MJ}+\frac{AB}{MK}\right)$ មានតំលៃអប្បបរមា :



៣ពិន្ទុ

គេមាន : $MI\cdot BC+MJ\cdot CA+MK\cdot AB=2S_{ABC}$ ៣ពិន្ទុ

តាង $a_1=\sqrt{MI\cdot BC}\quad a_2=\sqrt{MJ\cdot CA}\quad a_3=\sqrt{MK\cdot AB}$ ២ពិន្ទុ

$b_1=\sqrt{\frac{BC}{MI}}\qquad b_2=\sqrt{\frac{CA}{MJ}}\qquad b_3=\sqrt{\frac{AB}{MK}}$ ២ពិន្ទុ

២ពិន្ទុ

គេបាន : $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$(BC+CA+AB)^2\le 2S_{ABC}\cdot\left(\frac{BC}{MI}+\frac{CA}{MJ}+\frac{AB}{MK}\right)$ ៣ពិន្ទុ

ដើម្បីឱ្យ $\left(\frac{BC}{MI}+\frac{CA}{MJ}+\frac{AB}{MK}\right)$ មានតំលៃអប្បបរមា លុះត្រាតែ វិសមភាពខាងលើក្លាយជាសមភាព

លុះត្រាតែ $\frac{a_i}{b_i}$ ថេរ ២ពិន្ទុ

លុះត្រាតែ $MI=MJ=MK$

ដូចនេះ $\boxed{\text{M ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC}}$ ៣ពិន្ទុ

៧-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលសំណុំនៃពហុគុណរបស់ m ស្មើនឹង សំណុំនៃពហុគុណរួមរបស់ a និង b :

តាង M ជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។

នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ; ℓ ដែល $M=k.a=\ell.b$ (1) ២ពិន្ទុ

តាង $d=PGCD(a,b)$ នោះគេបាន : $a=a'd$; $b=b'd$ ដែល $PGCD(a',b')=1$

(1): $ka'd=\ell b'd$ ហើយ $ka'=\ell b'$ ២ពិន្ទុ

គឺ $b'|ka'$ តែ $PGCD(a',b')=1$ នោះ $b'|k$ ២ពិន្ទុ

នាំឱ្យ $k=b'q$ ដែល q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេបាន $M=(ab')q=mq$ (ដោយតាង $m=ab'$) ២ពិន្ទុ

បានន័យថាមាន $m=ab'$ ដែលគ្រប់ពហុគុណរួម M នៃ a, b ជាពហុគុណនៃ m ដែរ (i) [illegible]ពិន្ទុ

31

- ច្រាសមកវិញ :

គេអាចរកបាន $m = ab'$ ព្រោះគេមាន $a\ ;\ b = b'd$ ២ពិន្ទុ

តាង M' ជាពហុគុណនៃ $m = ab'$ នោះ M' ជាពហុគុណនៃ a (ii)

ម្យ៉ាងទៀត $m = ab' = (a'd)b' = a'(db') = a'b$ ២ពិន្ទុ

$m = a'b$ នោះ M' ជាពហុគុណនៃ b (iii) ២ពិន្ទុ

(ii) និង (iii) គេបាន M' ជាពហុគុណរួមនៃ a, b (iv) ២ពិន្ទុ

តាម (i) និង (iv) :

មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលសំណុំនៃពហុគុណរបស់ m ស្មើនឹង សំណុំនៃពហុគុណ រួមរបស់ a និង b

២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៥ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៦

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

ទូទាំងប្រទេស
2006
វិ.ទី II

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៥-២០០៦

សម័យប្រឡង: ០៥-០៥-០៦

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៧-០៥-០៦ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2005^2}+\frac{1}{2006^2}}$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0>2$ និង $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{4}{a_{n-1}}\right)$ ចំពោះ $n=1,2,3,\cdots$ ។

បង្ហាញថា $a_n>2$ ចំពោះគ្រប់ n ។

៣-(១០ពិន្ទុ) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេបន្លាយជ្រុង [AB] ខាង B ឱ្យបាន $BD=\frac{1}{p}AB$ ។

គេបន្លាយជ្រុង [BC] ខាង C ឱ្យបាន $CE=\frac{1}{p}BC$ ។ ហើយ បន្លាយជ្រុង [CA] ខាង A ឱ្យបាន $AF=\frac{1}{p}CA$ ។

គណនាផលធៀបផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ DEF និង ផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ABC ។

៤-(២០ពិន្ទុ) គេយក E ជាសំណុំនៃចំនួនពិតដែលធំជាង (-1) ។

អនុគមន៍ $f:E\to E$ កំណត់ដោយ $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x;y\in E$

ហើយ $\frac{f(x)}{x}$ កើនដាច់ខាត ចំពោះ $-1<x<0$ និង $x>0$ ។ កំណត់អនុគមន៍ f នោះ ។

៥-(២៥ពិន្ទុ) គេមាន [BC] ជាអង្កត់ធ្នូនឹងមួយនៃរង្វង់ (Γ) មួយ ។ A ជាចំណុចចល័តនៅលើធ្នូធំ BC នៃ (Γ) ។

I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ហើយ J ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ដែលនៅក្រៅ ΔABC ហើយប៉ះនឹង [BC], [AB) និង [AC) ។

ក- កំណត់សំណុំនៃចំណុច I និង J កាលណា A ចល័តនៅលើធ្នូធំ BC ។

ខ- សង់ សំណុំនៃចំណុច I និង J ។

៦-(២៥ពិន្ទុ) គេមាន a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ d ជាតួចែករួមធំបំផុតរបស់ a និង b ។

ក- បង្ហាញថា មានចំនួនគត់សនិទាន u និង v ដែល $au+bv=d$

ខ- ដោះស្រាយសមីការ $19x-33y=1$ ដែលមានអញ្ញាត $x;y$ ជាចំនួនគត់សនិទាន ។

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ 2006 (II)

សម័យប្រឡងថ្ងៃទី ០៨_០៨_០៦

១- ១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2005^2}+\frac{1}{2006^2}}$;

គេមាន : $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}{x^2(x+1)^2}$ ២ពិន្ទុ

$$= \frac{(x^2+x+1)^2}{x^2(x+1)^2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} = 1+\frac{1}{x(x+1)}$$

$$= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$ ២ពិន្ទុ

$$S = \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$\boxed{S = 2005+\frac{2005}{2006}}$$ ឬ $S = 2006 - \frac{1}{2006}$ ២ពិន្ទុ

២- ១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $a_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ n

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $a_0 > 2$ ។

- ចំពោះ $n = 1$, $a_1 - 2 = \frac{1}{2}\left(a_0+\frac{4}{a_0}\right) = \frac{(a_0-2)^2}{2a_0} > 0$

ដូចនេះ $a_1 > 2$ ២ពិន្ទុ

- ឧបមាថា $a_k > 2$ ២ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$

ទី.ព្រះសីហនុ
ឈ្មោះ ...

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k+\frac{4}{a_k}\right)$$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $a_k > 2$ នោះ $0 < \frac{4}{a_k} < 2 < a_k$ គឺ $a_k \neq \frac{4}{a_k}$ 1ពិន្ទុ

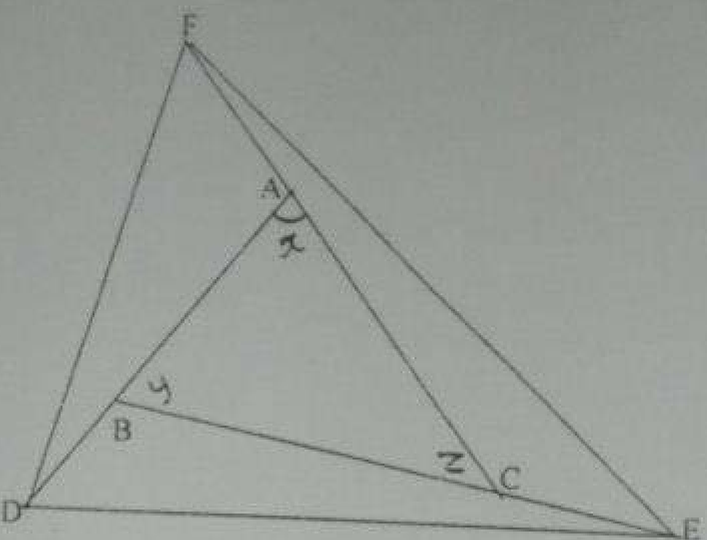
តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន $a_{k+1} > \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_k \times \frac{4}{a_k}}\right)$

$$a_{k+1} > 2$$ 1ពិន្ទុ

ដូចនេះ

$$\boxed{a_n > 2 \text{ ចំពោះគ្រប់ } n}$$ ២ពិន្ទុ

៣-(១០ពិន្ទុ) គណនាផលធៀបផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ DEF និង ផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ABC :



២ពិន្ទុ

តាង $\widehat{BAC} = x$; $\widehat{ABC} = y$; $\widehat{BCA} = z$

គេមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin x$ ២ពិន្ទុ

$$S_{AFD} = \frac{1}{2} AF \cdot AD \sin(\pi - x)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} AC \times \frac{p+1}{p} AB \sin x$$

$$= \frac{p-1}{p^2} S_{ABC}$$ ២ពិន្ទុ

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF \sin(\pi - z)$$

$$= \frac{p+1}{p^2} S_{ABC}$$ ១ពិន្ទុ

$$S_{BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE \sin(\pi - y)$$

$$= \frac{p+1}{p^2} S_{ABC}$$ ១ពិន្ទុ

គេបាន $S_{DEF} = \frac{3p+3}{p^2} S_{ABC} + S_{ABC} = \frac{p^2+3p+3}{p^2} S_{ABC}$

ដូចនេះ

$$\boxed{\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{p^2+3p+3}{p^2}}$$ ២ពិន្ទុ

៤-(២០ពិន្ទុ) កំណត់អនុគមន៍ f :

ឧបមាថា $f(p)=p$ ចំពោះ $p>-1$ ២ពិន្ទុ

យក $x=y=p$ នោះគេបាន $f(2p+p^2)=2p+p^2$ (1) ២ពិន្ទុ

តាង $q=2p+p^2$ នោះ (1) អាចសរសេរ $f(q)=q$ ២ពិន្ទុ

- បើ $-1<p<0$ នោះគេបាន $-1<q<p$

តែ $f(p)=p$ និង $f(q)=q$ នោះ $\dfrac{f(p)}{p}=\dfrac{f(q)}{q}$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៣ពិន្ទុ

- បើ $p>0$ នោះគេបាន $q>p$

តែ $\dfrac{f(p)}{p}=\dfrac{f(q)}{q}$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ គេត្រូវតែបាន $p=0$ ហើយ $f(0)=0$ ៣ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត យក $x=y$ ជំនួសក្នុងទំនាក់ទំនងដើម :

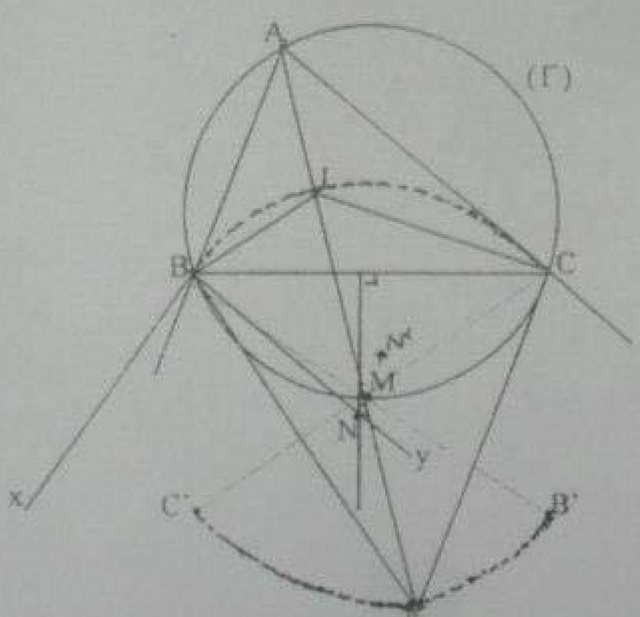
$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$ ដែលមានរាង $f(p)=p$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $x\in E$ គេបាន $x+f(x)+xf(x)=0$

$$(1+x)f(x)=-x$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{x}{1+x}}$$ ៣ពិន្ទុ

៥-(២៥ពិន្ទុ) ក- កំណត់សំណុំនៃចំណុច I និង J កាលណា A ផ្លាស់ទីលើធ្នូធំ BC :



៣ពិន្ទុ

36

§កំណត់សំណុំនៃចំណុច I :

គេមាន $\widehat{BIC} = 180^0 - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)$

$= 180^0 - \frac{180^0 - \hat{A}}{2} = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = 2\alpha$: ថេរ នោះគេបាន $\widehat{BIC} = 90^0 + \alpha$: ថេរ

គេមាន $\widehat{BIC} = 90^0 + \alpha$: ថេរ ហើយ $[BC]$: នឹង

នេះបញ្ជាក់ថា I ស្ថិតនៅលើធ្នូកាប៉ាបនៃមុំ $(90^0 + \alpha)$ ត្រូវនឹង $[BC]$ ។ ២ពិន្ទុ

បញ្ជាក់លីមីត :

- ដោយ I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC នោះ I ត្រូវស្ថិតក្នុងកន្លះប្លង់ជាមួយធ្នូធំ BC ធៀបនឹង(BC) 1 ពិន្ទុ,
- បើ A ត្រួតលើ B ឬ C នោះ គ្មានចំណុច I ទេ ។ 1ពិន្ទុ

សន្និដ្ឋាន :

សំណុំនៃចំណុច I គឺជាធ្នូកាប៉ាប BIC នៃមុំ $(90^0 + \alpha)$ ត្រូវនឹង $[BC]$ដែលគ្មាន B&C ហើយស្ថិតក្នុងកន្លះប្លង់ជាមួយធ្នូធំ BC ធៀបនឹង(BC) ។

២ពិន្ទុ

§កំណត់សំណុំនៃចំណុច J :

តាង M ជាប្រសព្វរវាង$[AI)$នឹង ធ្នូតូច BC ។

គេបាន $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$ នោះ $BM = MC$ គឺថា M នៅលើមេដ្យាទ័រនៃ$[BC]$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត ចតុកោណ BJCI ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[IJ]$

គេទាញបាន M ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ (BJCI) ហើយ $J = S_M(I)$ ដែល S_M ជាបំលែងឆ្លុះផ្ចិត M ។

ដូចនេះ J ស្ថិតនៅលើធ្នូមួយដែលជារូបឆ្លុះនៃសំណុំចំណុច I តាម S_M ។ ២ពិន្ទុ

បញ្ជាក់លីមីត :

- យក $B' = S_M(B)$, $C' = S_M(C)$ ដែល S_M ជាបំលែងឆ្លុះផ្ចិត M ។ ២ពិន្ទុ
- បើ A ត្រួតលើ B ឬ C នោះ គ្មានចំណុច I;J ។ គឺថា J មិនអាចត្រួតលើ B' , C' ទេ ។

សន្និដ្ឋាន :

សំណុំនៃចំណុច J គឺជាធ្នូ $\overset{\frown}{B'JC'}$ ដែលគ្មាន B'&C' ហើយជារូបឆ្លុះនៃសំណុំចំណុច I តាមS_M

២ពិន្ទុ

សំណង់សំណុំចំណុច I :

- សង់ $[Bx)$ ដែល $x\hat{B}C = 90^0 + \alpha$ ហើយសង់ $[By) \perp [Bx)$ ១ពិន្ទុ

- សង់មេដ្យាទ័រ (d) នៃ $[BC]$ ។ យក $\{N\} = (d) \cap [By)$ ១ពិន្ទុ

- យក N ជាផ្ចិត សង់ធ្នូ BIC ។ យកផ្នែកនៃ ធ្នូ BIC ដែលគ្មានចំណុច B & C ។ ១ពិន្ទុ

សំណង់សំណុំចំណុច J :

- សង់ B' ដែល $B' = S_M(B)$ - សង់ C' ដែល $C' = S_M(C)$ ១ពិន្ទុ

- សង់ N' ដែល $N' = S_M(N)$ -យក N' ជាផ្ចិត សង់ធ្នូ B'JC' ១ពិន្ទុ

យកផ្នែកនៃ ធ្នូ B'JC' ដែលគ្មានចំណុច B' & C' ។ ១ពិន្ទុ

៦-(២៥ពិន្ទុ) ក- បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប u និង v ដែល $au + bv = d$:

តាម Euclidean Algorithm គេបាន :

$a = bq_1 + r_1$ $\quad r_1 < b$ $\quad (1)$

$b = r_1 q_2 + r_2$ $\quad r_2 < r_1$ $\quad (2)$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$ $\quad r_3 < r_2$ $\quad (3)$ ២ពិន្ទុ

....

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ $\quad r_n < r_{n-1}$ $\quad (n)$ ២ពិន្ទុ

$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$ $\quad (n+1)$

គេបាន $r_n = d$ ២ពិន្ទុ

យើងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដែល $1 \le p \le n$, $r_p = x_p a + y_p b$

ដោយ $x_p, y_p \in Z$

- តាម (1) : $r_1 = 1 \cdot a + (-q_1)b = x_1 a + y_1 b$ ពិតចំពោះ $p = 1$ ២ពិន្ទុ

- ឧបមាថាពិតដល់ $r_{p-1} = x_{p-1}a + y_{p-1}b$ ដែល $x_{p-1}, y_{p-1} \in Z$ ២ពិន្ទុ

- ពិនិត្យករណី r_p :

តាម (p) គេអាចសរសេរ $r_{p-2} = r_{p-1}q_p + r_p$ ២ពិន្ទុ

$r_p = r_{p-2} + (-q_p)r_{p-1}$

$= (x_{p-2}a + y_{p-2}b) + (-q_p)(x_{p-1}a + y_{p-1}b)$ ដែល $x_{p-2}, x_{p-1}, y_{p-2}, y_{p-1} \in Z$ ២ពិន្ទុ

$= (x_{p-2} - q_p x_{p-1})a + (y_{p-2} - q_p y_{p-1})b$

$r_p = x_p a + y_p b$ ដែល $x_p = x_{p-2} - q_p x_{p-1}$, $y_p = y_{p-2} - q_p y_{p-1} \in Z$ ៣ពិន្ទុ

គេទាញបានថា ទំនាក់ទំនងពិតចំពោះគ្រប់ p ដែល $1 \le p \le n$

ចំពោះ $p = n$ គេបាន $r_n = x_n a + y_n b$ ដែល $x_n, y_n \in Z$

ដូចនេះ $\boxed{\text{មាន } u = x_n, v = y_n \in Z \text{ ដែល } d = au + bv}$ ២ពិន្ទុ

ខ ដោះស្រាយសមីការ $19x - 33y = 1$ ដែលមានអញ្ញាត x , y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

ចំពោះ $x = 7, y = 4$ គេបាន $19 \times 7 - 33 \times 4 = 1$

សមីការដើមសមមូលនឹង $19(x-7) - 33(y-4) = 0$

$19(x-7) = 33(y-4) \quad (i)$ ៣ពិន្ទុ

គេបាន $19 | 33(y-4)$ តែ $PGCD(19,33) = 1$

នាំឱ្យ $19 | (y-4)$ គឺថា $y = 19k + 4$, $k \in Z$ ២ពិន្ទុ

(i) : $19(x-7) = 33(19k)$

$x - 7 = 33k$

$x = 33k + 7$

សមីការមានចម្លើយ $\boxed{x = 33k + 7 \; ; \; y = 19k + 4 \text{ ដែល } k \in Z}$ ២ពិន្ទុ

វិ.ព្រះសីហនុ

ឈុន ការីណា

០៨.៧

ថ្ងៃទី ០៧ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៦

ប្រធានក្រុមកែរណ៍ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុ សាងលី

2007

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសផ្នែក អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង : ១៩ តុលា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ ថ្ងៃទី១៩ តុលា ២០០៧

រយៈពេល : ១៨០នាទី

១. (៥ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S_{2007} = 7 + 77 + 777 + \cdots + 777\cdots7$ ដែល តួ $777\cdots7$ មានលេខ 7 ចំនួន 2007 ដង ។

២. (១០ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀប $A = \dfrac{(2007,2007200720072007)^2 + 3}{2005,2007200720072007}$ និង $B = \dfrac{(2007,2007200720072008)^2 + 3}{2005,2007200720072008}$

៣. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\dfrac{1}{15} < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{7}{8} \times \cdots \times \dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$;

៤. (១០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតខុសពីសូន្យ (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + n u_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ និង $u_0 = a$ ។

គណនា u_{2007} ជាអនុគមន៍នៃ a ។

៥. (១៥ពិន្ទុ) គេដឹងថា : $6^2 - 5^2 = 11$; $56^2 - 45^2 = 1111$

$556^2 - 445^2 = 111111$; $5556^2 - 4445^2 = 11111111$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅនោះផង ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ គេគូសបន្ទាត់ភ្ជាប់ពីកំពូល B ទៅ k ចំណុចនៃជ្រុងឈម[AC] ។ គេគូសបន្ទាត់ភ្ជាប់ពីកំពូល C ទៅ k ចំណុចនៃជ្រុងឈម[AB] ។ តើបន្ទាត់ទាំង 2k នោះបានបែងចែក ΔABC ជាប៉ុន្មានផ្នែក ។

៧. (១៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន 2008 សមីការ និង 2008 អញ្ញាត ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2006} + x_{2007} + x_{2008} = 0 \\ x_{2007} + x_{2008} + x_1 = 0 \\ x_{2008} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

៨. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ $S_{p,t} = 1^t + 2^t + \cdots + p^t$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង t ជាចំនួនគត់សេស ។

បង្ហាញថា $2S_{p,t}$ ចែកដាច់នឹង $p(p+1)$ ។

40

១-(៥ពិន្ទុ) គណនា ផលបូក S_{2007} : $S_{2007}=7(1+11+111+\cdots+111\cdots1)$

$$S_{2007}=\frac{7}{9}(9+99+999+\cdots+999\cdots9)$$ ១ពិន្ទុ

$$=\frac{7}{9}\left[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{2007}-1)\right]$$ ១ពិន្ទុ

$$=\frac{7}{9}\left[(10+10^2+10^3+\cdots+10^{2007})-2007\right]$$ ១ពិន្ទុ

$$=\frac{7}{9}\left[\frac{10(10^{2007}-1)}{10-1}-2007\right]$$ ១ពិន្ទុ

$$\boxed{S_n=\frac{7}{81}\left(10^{2008}-18073\right)}$$ ១ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀប A & B ::

គេយក $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$ ២ពិន្ទុ

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$ ២ពិន្ទុ

$x^2-4x-3=0$, $x=2\pm\sqrt{7}$

$f'(x)>0$ ចំពោះ $x>2+\sqrt{7}$

ដូចនេះ f កើនដាច់ខាត ចំពោះ $x>2+\sqrt{7}$ ២ពិន្ទុ

តែ $2+\sqrt{7}<2007,2007200720072007<2007,2007200720072008$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $A=f(2007,2007200720072007)<f(2007,2007200720072008)=B$ ២ពិន្ទុ

៣-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{7}{8}\times\cdots\times\dfrac{99}{100}<\dfrac{1}{10}$

តាង $P=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{7}{8}\times\cdots\times\dfrac{99}{100}$ (1)

គេបាន $P<\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{8}{9}\times\cdots\times\dfrac{100}{101}$ (2) ២ពិន្ទុ

$P>\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{6}{7}\times\cdots\times\dfrac{98}{99}$ (3) ២ពិន្ទុ

គុណ(1) & (2) ; (1) & (3) :

$P^2<\dfrac{1}{101}<\dfrac{1}{100}$ នាំឱ្យ $P<\dfrac{1}{10}$ (4) ២ពិន្ទុ

$P^2>\dfrac{1}{200}>\dfrac{1}{225}$ នាំឱ្យ $P>\dfrac{1}{15}$ (5) ២ពិន្ទុ

(4) & (5) គេបាន $\dfrac{1}{15}<P<\dfrac{1}{10}$ ២ពិន្ទុ

៤-(១០ពិន្ទុ) គណនា u_{2007} ជាអនុគមន៍នៃ a :

41

គេមាន $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+nu_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + n$ ហើយ $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = n$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $\dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_0} = 0$ ១ពិន្ទុ

$\dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_1} = 1$ ១ពិន្ទុ

$\dfrac{1}{u_3} - \dfrac{1}{u_2} = 2$ ១ពិន្ទុ

....

$\dfrac{1}{u_{2007}} - \dfrac{1}{u_{2006}} = 2006$ ១ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គនិងអង្គ :

$\dfrac{1}{u_{2007}} - \dfrac{1}{u_0} = 1 + 2 + \cdots + 2006$ ២ពិន្ទុ

$= (1003)(2007)$

$u_{2007} = \dfrac{a}{1+(1003)(2007)a}$ ២ពិន្ទុ

៥-(១៥ពិន្ទុ) ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ :

$6^2 - 5^2 = 11$: អង្គទី១គ្មានលេខ5 នៅមុខលេខ6 និង គ្មានលេខ4 នៅមុខលេខ5 ហើយអង្គទី២ មានលេខ 1 ចំនួន $2\times 0+2$ ។ ២ពិន្ទុ

$56^2 - 45^2 = 1111$: អង្គទី១មានលេខ5 ចំនួន១ និង លេខ4 ចំនួន១ហើយអង្គទី២មានលេខ1 ចំនួន $2\times 1+2$ ។ ២ពិន្ទុ

$556^2 - 445^2 = 111111$: អង្គទី១មានលេខ5 ចំនួន២ និង លេខ4 ចំនួន២ហើយអង្គទី២មានលេខ1 ចំនួន $2\times 2+2$ ២ពិន្ទុ

$5556^2 - 4445^2 = 11111111$: អង្គទី១មានលេខ5 ចំនួន៣ និង លេខ4 ចំនួន៣ហើយអង្គទី២ មានលេខ1 ចំនួន $2\times 3+2$ ១ពិន្ទុ

គេបានរូបមន្តទូទៅ :

$(555\ldots56)^2 - (444\ldots45)^2 = 111\ldots1$ ដែល $555\ldots56$ មានលេខ 5 ចំនួន n ដង $444\ldots45$ មានលេខ4 ចំនួន n ដង ហើយ $111\ldots1$ មានលេខ 1ចំនួន $2n+2$ ដង ដែល $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ។ ២ពិន្ទុ

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ $(555\ldots56)^2 - (444\ldots45)^2 = 111\ldots1$:

គេមាន :

$(555\ldots56)^2 - (444\ldots45)^2 = \left[(555\ldots56)+(444\ldots45)\right]\left[(555\ldots56)-(444\ldots45)\right]$

$= (100\ldots01)(111\ldots1)$ ដែល $100\ldots01$ មាន n លេខ0 ហើយ $111\ldots1$ មាន $n+1$ លេខ 1 ២ពិន្ទុ

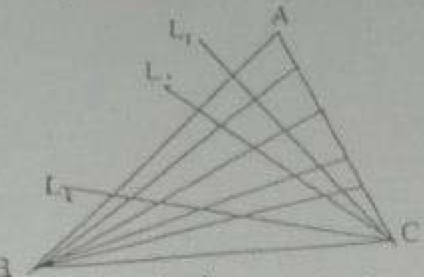
$= (100\ldots0+1)(111\ldots1)$ ដែល $100\ldots0$ មាន $n+1$ លេខ0 ហើយ $111\ldots1$ មាន $n+1$ លេខ 1

$= 111\ldots1000\ldots0 + 111\ldots1$ ដែល $111\ldots1000\ldots0$ មាន $n+1$ លេខ 1 និង $n+1$ លេខ0

ហើយ $11\ldots1$ មាន $n+1$ លេខ 1 ២ពិន្ទុ

$= 11\ldots1$ ដែលមានលេខ 1 ចំនួន $2n+2$ ដង ។ ២ពិន្ទុ

៦-(១៥ពិន្ទុ) គេបន្ទាត់ទាំង $2k$ នោះបានចែក ΔABC ជាចំនួនផ្នែក :



៣ពិន្ទុ

- គេគូសបន្ទាត់ភ្ជាប់ពីកំពូល B ទៅ k ចំណុចនៃជ្រុងឈម $[AC]$ ។ បន្ទាត់ទាំងនោះចែក ΔABC ជា $k+1$ ត្រីកោណតូចៗ ។ ៣ពិន្ទុ
- បើគេគូសបន្ទាត់ L_1 មួយភ្ជាប់ពីកំពូល C ទៅចំណុចមួយក្នុងចំណោម k ចំណុចនៃជ្រុងឈម $[AB]$ នោះគេបាន $2(k+1)$ ផ្នែក គឺមានរាង $(1+1)(k+1)$ ផ្នែក ៣ពិន្ទុ
- បើគេគូសបន្ទាត់ L_2 មួយទៀតភ្ជាប់ពីកំពូល C ទៅចំណុចមួយទៀតក្នុងចំណោម $k-1$ ចំណុចនៃជ្រុងឈម $[AB]$ នោះគេបាន $3(k+1)$ ផ្នែក គឺមានរាង $(2+1)(k+1)$ ផ្នែក ៣ពិន្ទុ
- តាមរបៀបដូចគ្នានេះរហូតដល់បន្ទាត់ L_k គេបាន $(k+1)(k+1)$ ផ្នែក ឬ $(k+1)^2$ ផ្នែក ។ ៣ពិន្ទុ

៧-(១៥ពិន្ទុ) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន 2008 សមីការ និង 2008 អញ្ញាត ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{2006} + x_{2007} + x_{2008} = 0 \\ x_{2007} + x_{2008} + x_1 = 0 \\ x_{2008} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គនៃសមីការទាំង 2008 :

$3(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2008}) = 0 \quad ; \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{2008} = 0$ ៣ពិន្ទុ

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + \cdots + (x_{2005} + x_{2006} + x_{2007}) + x_{2008} = 0$$
$$0 + 0 + \cdots + 0 + x_{2008} = 0$$
$$x_{2008} = 0$$

៣ពិន្ទុ

$$(x_{2008} + x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + \cdots + (x_{2004} + x_{2005} + x_{2006}) + x_{2007} = 0$$
$$0 + 0 + \cdots + 0 + x_{2007} = 0$$
$$x_{2007} = 0$$

៣ពិន្ទុ

$$(x_{2007} + x_{2008} + x_1) + (x_2 + x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2003} + x_{2004} + x_{2005}) + x_{2006} = 0$$
$$0 + 0 + \cdots + 0 + x_{2006} = 0$$
$$x_{2006} = 0$$

៣ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នាគេបាន : $x_{2005} = x_{2004} = x_{2003} = \cdots = x_2 = x_1 = 0$

៣ពិន្ទុ

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ : $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{2008} = 0$

៥-(២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ $S_{p,t} = 1^t + 2^t + \cdots + p^t$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង t ជាចំនួនគត់សេស ។

បង្ហាញថា $2S_{p,t}$ ចែកដាច់នឹង $p(p+1)$:

គេមាន : $S_{p,t} = 1^t + 2^t + \cdots + p^t$

$S_{p,t} = p^t + (p-1)^t + \cdots + 1^t$ ២ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ:

$2S_{p,t} = (1^t + p^t) + (2^t + (p-1)^t) + \cdots + (p^t + 1^t)$ ២ពិន្ទុ

$= (1+p)\left[\sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 1^{t-i-1}p^i + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 2^{t-i-1}(p-1)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i p^{t-i-1}1^i\right]$ ២ពិន្ទុ

ព្រោះ t ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ $2S_{p,t} = (p+1)m \quad (1)$ ២ពិន្ទុ

ដែល $m = \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 1^{t-i-1}p^i + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 2^{t-i-1}(p-1)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i p^{t-i-1}1^i$ ជាចំនួនគត់

ម្យ៉ាងទៀត $S_{p,t} = 1^t + 2^t + \cdots + (p-1)^t + p^t$

$S_{p,t} = (p-1)^t + (p-2)^t + \cdots + 1^t + p^t$ ២ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គនិងអង្គ :

$2S_{p,t} = (1^t + (p-1)^t) + (2^t + (p-2)^t) + \cdots + ((p-1)^t + 1^t) + 2p^t$

$= p\left[\sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 1^{t-i-1}(p-1)^i + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 2^{t-i-1}(p-2)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i (p-1)^{t-i-1}1^i + 2p^{t-1}\right]$ ២ពិន្ទុ

ព្រោះ t ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ $2S_{p,t} = pn \quad (2)$ ២ពិន្ទុ

ដែល $n = \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 1^{t-i-1}(p-1)^i + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i 2^{t-i-1}(p-2)^i + \cdots + \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i (p-1)^{t-i-1}1^i + 2p^{t-1}$

ជាចំនួនគត់

(1) & (2) គេបាន $(p+1)m = pn$ ហើយ $n = \frac{(p+1)m}{p}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ n ជាចំនួនគត់ នោះ $p \mid (p+1)m$

តែ $GCD(p,(p+1)) = 1$

នោះ $p \mid m$ គឺថា $m = kp$ ដែល k ជាចំនួនគត់ (Gauss' Theorem) ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $2S_{p,t} = m(p+1) = kp(p+1)$

ដូចនេះ $p(p+1) \mid 2S_{p,t}$ ២ពិន្ទុ

LCM (Least Comment Multiple)
GCD
Greatest Common Divisor

ថ្ងៃទី ១៨ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៧

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី ស៊ាងណី

ខ្ញុំទាំងប្រសើរ

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែថ្នាក់ទូទាំងប្រទេស ផ្នែក អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

2007

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី ២១ តុលា ២០០៧ 3. ទី II.

រយៈពេល : ១៨០នាទី

ឈ្មោះ សារិកា

១. (១០ពិន្ទុ) M ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់បីដែលមានធាតុជាចំនួនគត់ ។ គេដឹងថាផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរដេកនីមួយៗ ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរឈរនីមួយៗ និងផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមអង្កត់ទ្រូងនីមួយៗ ស្មើនឹង m ដូចគ្នា ។ បង្ហាញថា m ជាគូបនៃមួយចំនួនគត់ ។

២. (១០ពិន្ទុ) រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ $(2^{2007}-1)$ និង $(2^{2^{2007}}+1)$ ។

៣. (១០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនពីរ $A=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$ និង $B=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1}-2\times a_0$ ដែល $a_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ ។

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ B ចែកដាច់នឹង 7 ។

៤. (១៥ពិន្ទុ) គេដឹងថា :

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times4}\right) ។$$

ពិនិត្យមើលលំនាំខាងលើ ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅនោះផង ។

៥. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

(1) g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0,+\infty[$

(2) $g(x)\times g\left[g(x)+\frac{1}{x}\right]=1$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

គណនា $g(1)$ ។

៦. (២០ពិន្ទុ) ស្វីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=\frac{4}{3}$ និង $(2n+1)x_n=2^n+2n\,x_{n-1}$ ចំពោះ $n=2,3,\ldots$ ។

បង្ហាញតាមវិធានកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{C(n,i)}{2i+1}$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ ។

៧. (២០ពិន្ទុ) កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុង $[AA')$, $[BB')$ និង $[CC')$ នៃត្រីកោណ ABC មួយ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ I ហើយជួបជ្រុងឈម រៀងគ្នាត្រង់ A', B' និង C' ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{1}{2}\right)^2<\frac{IA}{AA'}\times\frac{IB}{BB'}\times\frac{IC}{CC'}\le\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ។

១-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា m ជាគូបនៃមួយចំនួនគត់ :

តាង ម៉ាទ្រីស $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ២ពិន្ទុ

គេមាន $abc = def = ghi = adg = beh = cfi = aei = ceg = m$ ២ពិន្ទុ

គេអាចជ្រើសរើសយក $beh = aei = gec = m$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $h = \frac{m}{be}\ ; i = \frac{m}{ae}\ ; g = \frac{m}{ce}$

$$ghi = \frac{m}{ce}\times\frac{m}{be}\times\frac{m}{ae} = \frac{m^3}{abce^3} \quad \text{ឬ} \quad m = \frac{m^3}{me^3}$$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\underline{m = e^3}$ ២ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) រកតួចែករួមធំបំផុតនៃ $(2^{2007}-1)$ និង $(2^{2^{2007}}+1)$:

តាង d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $(2^{2007}-1)$ និង $(2^{2^{2007}}+1)$ ។ ២ពិន្ទុ

គេបាន $2^{2007}-1 = md$ ដែល m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$2^{2^{2007}}+1 = nd$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $(m,n)=1$ ២ពិន្ទុ

នោះគេទាញបាន $2^{2007} = md+1\ ;\quad 2^{2^{2007}} = nd-1$

ហើយ $(2^{2007})^{2^{2007}} = (md+1)^{2^{2007}} = kd+1$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (1) ២ពិន្ទុ

$(2^{2^{2007}})^{2007} = (nd-1)^{2007} = pd-1$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (2)

(1) និង (2) : $pd-1 = kd+1$ នោះ $(p-k)d = 2$ ដែល $(p-k)$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេទាញបាន $d\,|\,2$ ២ពិន្ទុ

តែ d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ ចំនួនគត់សេស $(2^{2007}-1)$ និង $(2^{2^{2007}}+1)$ នោះ d ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ $d = 1$ ២ពិន្ទុ

៣-(១០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនគត់ $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ និង $B = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} - 2\times a_0$

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ B ចែកដាច់នឹង 7 :

- បង្ហាញថា បើ A ចែកដាច់នឹង 7 នោះ B ចែកដាច់នឹង 7 :

តាង $C = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ នោះ $A = 10C + a_0$ និង $B = C - 2a_0$ ២ពិន្ទុ

បើ $7|A$ នោះ $7\,|\,2A = 20C + 2a_0$

តែ $7\,|\,(21C + 7a_0)$

គេទាញបាន $7\,|\,((21C+7a_0)-(20C+2a_0)) = C + 5a_0$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $7|7a_0$

ដូចនេះ $7|(C+5a_0-7a_0) = C - 2a_0 = B$ ២ពិន្ទុ

- បង្ហាញថា បើ B ចែកដាច់នឹង 7 នោះ A ចែកដាច់នឹង 7 :

បើ $7|B$ នោះ $7\,|\,10B = 10C - 20a_0$ ២ពិន្ទុ

តែ $7\,|\,(21a_0)$

ដូចនេះ $7|(10C - 20a_0 + 21a_0) = 10C + a_0 = A$ ២ពិន្ទុ

៤-(១៥ពិន្ទុ) ទាញរករូបមន្តទូទៅ :

គេដឹងថា :

3

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$ មានរាង $$\prod_{i=2}^{2}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2(2+1)}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$ មានរាង $$\prod_{i=2}^{3}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3(3+1)}\right)$$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបានរូបមន្តទូទៅ : $\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ ដែល $n = 2,3,4,\ldots$ ២ពិន្ទុ

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ :

- រូបមន្តពិតចំពោះ $n = 2$ ១ពិន្ទុ

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$: $\prod_{i=2}^{k}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)$ ២ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)=\prod_{i=2}^{k}\left(\frac{1-\frac{1}{i^3}}{1+\frac{1}{i^3}}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{(k+1)^3}}{1+\frac{1}{(k+1)^3}}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{(k+1)^3}}{1+\frac{1}{(k+1)^3}}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{k^2+3k+3}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$ ២ពិន្ទុ

៥-(១៥ពិន្ទុ) គណនា $g(1)$

តាង $k = g(1)$

ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $g(1)\times g(g(1)+1)=1$ ឬ $k\,g(k+1)=1$

ហើយ $g(k+1)=\frac{1}{k}$ ២ពិន្ទុ

ចំពោះ $x = k+1$ គេបាន $g(k+1)\times g(g(k+1)+\frac{1}{k+1})=1$ ២ពិន្ទុ

$\frac{1}{k}\times g(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})=1$ ឬ $g(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})=k=g(1)$ ២ពិន្ទុ

ដោយអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $]0,+\infty[$ នោះគេបាន $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}=1$ ២ពិន្ទុ

$k^2-k-1=0$ $(k\neq 0, k\neq -1)$ មាន $\Delta=\sqrt{5}$; $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ២ពិន្ទុ

- ចំពោះ $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ គេបាន $1<k=g(1)<g(1+k)=\frac{1}{k}<1$ ដែលផ្ទុយពីការពិត។

$g(x)$:

$(2) = g(x)\cdot g\left[g(x)+\frac{1}{x}\right]=1$

$g(x)+\frac{1}{x}=g(x)$

(2) $g(x)\cdot g(f(x))=1$ (1)

$x^2f^2(x)-3xf(x)+1=0$

$\Delta = 9x^2-4x^2=5x^2$

$f(x)=\frac{3x\pm\sqrt{5}x}{2x^2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2x}$

$g(x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$

$g(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$

47

- ចំពោះ $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=k=g(1)>g(1+k)=\frac{1}{k}=\frac{2}{1-\sqrt{5}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ មិនពិត ។

ដូចនេះ $g(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ៣ពិន្ទុ

៦-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញតាមវិចារកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{C(n,i)}{2i+1}$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$:

- ចំពោះ $n=1$ គេបាន $\sum_{i=0}^{1}\frac{C(1,i)}{2i+1}=\frac{C(1,0)}{2\times 0+1}+\frac{C(1,1)}{2\times 1+1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=x_1$ ពិតចំពោះ $n=1$ ។ ២ពិន្ទុ

- ឧបមាថាពិតរហូតដល់ $n=k$: $x_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{C(k,i)}{2i+1}$ (1) ២ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$:

$(2k+3)x_{k+1}=2^{k+1}+2(k+1)x_k$ (2) ២ពិន្ទុ

តែ $2^{k+1}=(1+1)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C(k+1,i)$ ២ពិន្ទុ

(2) អាចសរសេរ : $(2k+3)x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C(k+1,i)+2(k+1)\sum_{i=0}^{k}\frac{C(k,i)}{2i+1}$ (3) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត

$$C(k,i)=\frac{k!}{(k-i)!i!}=\frac{(k+1-i)(k+1)k!}{(k+1-i)(k+1)(k-i)!i!}=\frac{(k+1-i)}{k+1}\times\frac{(k+1)!}{(k-i+1)!i!}$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{(k+1-i)}{k+1}C(k+1,i)$$

$(k+1)C(k,i)=(k+1-i)C(k+1,i)$ ២ពិន្ទុ

(3) អាចសរសេរ : $(2k+3)x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C(k+1,i)+2\sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1-i)C(k+1,i)}{2i+1}$

$$(2k+3)x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C(k+1,i)+2\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1-i)C(k+1,i)}{2i+1}+\frac{((k+1)-(k+1))C(k+1,k+1)}{2(k+1)+1}\right)$$ ២ពិន្ទុ

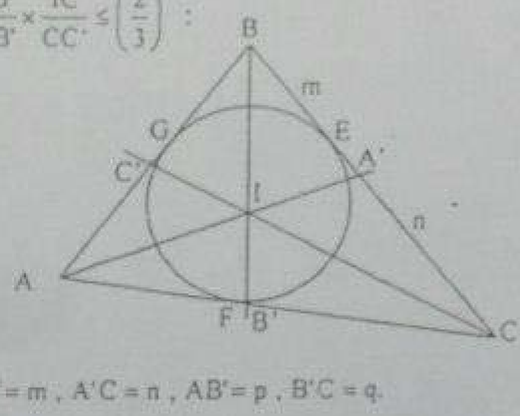
$$=\sum_{i=0}^{k+1}C(k+1,i)+2\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(k+1-i)C(k+1,i)}{2i+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\left[\left(1+\frac{2k+2-2i}{2i+1}\right)C(k+1,i)\right]$$

$$=(2k+3)\sum_{i=0}^{k+1}\frac{C(k+1,i)}{2i+1}$$ ២ពិន្ទុ

$$x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{C(k+1,i)}{2i+1}$$

ដូចនេះ $x_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{C(n,i)}{2i+1}$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ ២ពិន្ទុ

៧-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\left(\frac{1}{2}\right)^3<\frac{IA}{AA'}\times\frac{IB}{BB'}\times\frac{IC}{CC'}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3$:



៣ពិន្ទុ

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $BA'=m$, $A'C=n$, $AB'=p$, $B'C=q$.

48

តាមទ្រឹស្តីបទកន្ទុះពុះទៀ $\angle A$: $\dfrac{c}{b}=\dfrac{m}{n}$ ២ពិន្ទុ

$\dfrac{n}{b}=\dfrac{m}{c}=\dfrac{n+m}{b+c}=\dfrac{a}{b+c}$

គេបាន $m=\dfrac{ac}{b+c}$, $n=\dfrac{ab}{b+c}$ ១ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទកន្ទុះពុះទៀ $\angle B$: $\dfrac{IA}{IA'}=\dfrac{c}{m}=\dfrac{c(b+c)}{ac}=\dfrac{b+c}{a}$

$\dfrac{IA}{b+c}=\dfrac{IA'}{a}=\dfrac{IA+IA'}{a+b+c}=\dfrac{AA'}{a+b+c}$

$\dfrac{IA}{b+c}=\dfrac{AA'}{a+b+c}\Rightarrow\dfrac{IA}{AA'}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$ ២ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទកន្ទុះពុះទៀ $\angle B$: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{p}{q}\Rightarrow\dfrac{q}{a}=\dfrac{p}{c}=\dfrac{p+q}{a+c}=\dfrac{b}{a+c}$

ហើយ $p=\dfrac{bc}{a+c}$, $q=\dfrac{ab}{a+c}$ ១ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទកន្ទុះពុះទៀ $\angle A$: $\dfrac{IB}{IB'}=\dfrac{c}{p}=\dfrac{c(a+c)}{bc}=\dfrac{a+c}{b}$

$\dfrac{IB}{a+c}=\dfrac{IB'}{b}=\dfrac{IB+IB'}{a+b+c}=\dfrac{BB'}{a+b+c}$

$\dfrac{IB}{a+c}=\dfrac{BB'}{a+b+c}\Rightarrow\dfrac{IB}{BB'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}$ ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា : $\dfrac{IC}{CC'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}$

តាម $P_{a,b,c}=\dfrac{IA}{AA'}\times\dfrac{IB}{BB'}\times\dfrac{IC}{CC'}=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$ ១ពិន្ទុ

តាម $GM-AM$ គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)\le\left(\dfrac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3$ ២ពិន្ទុ

$(a+b)(b+c)(c+a)\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^3(a+b+c)^3$; $P_{a,b,c}=\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ (1) ១ពិន្ទុ

រង្វង់ចារឹក I ប៉ះជ្រុងនៃត្រីកោណត្រង់ E, F, G ។ គេយក $BE=BG=x$, $CE=CF=y$, $AF=AG=z$ ។

គេបាន $\dfrac{IA}{AA'}=\dfrac{b+c}{a+b+c}=\dfrac{x+y+z+z}{2(x+y+z)}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{z}{x+y+z})=\dfrac{1}{2}(1+t_1)$; $t_1=\dfrac{z}{x+y+z}$ ១ពិន្ទុ

$\dfrac{IB}{BB'}=\dfrac{a+c}{a+b+c}=\dfrac{x+y+z+x}{2(x+y+z)}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{x}{x+y+z})=\dfrac{1}{2}(1+t_2)$; $t_2=\dfrac{x}{x+y+z}$ ១ពិន្ទុ

$\dfrac{IC}{CC'}=\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{x+y+z+y}{2(x+y+z)}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{x+y+z})=\dfrac{1}{2}(1+t_3)$; $t_3=\dfrac{y}{x+y+z}$ ១ពិន្ទុ

$P_{a,b,c}=\dfrac{IA}{AA'}\times\dfrac{IB}{BB'}\times\dfrac{IC}{CC'}=\dfrac{1}{8}(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)$

$=\dfrac{1}{8}(1+\overset{t_1+t_2+t_3=1}{1}+t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2t_3)>\dfrac{2}{8}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ (2) ១ពិន្ទុ

តាម (1) & (2) : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<P_{a,b,c}=\dfrac{IA}{AA'}\times\dfrac{IB}{BB'}\times\dfrac{IC}{CC'}\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ ១ពិន្ទុ

ឈុន សេងណាំ
CHHUN SENGNAM

ថ្ងៃទី ២១ ខែ មីនា ឆ្នាំ ២០០៧
ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សំងលី

49

2008

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៧-២០០៨

សម័យប្រឡង: ០៦-០៥-០៨

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ ថ្ងៃទី ០៦-០៥-០៨ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(៥ពិន្ទុ) គណនា $S_{2008}=(1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+2008\times2010)-(1^2+2^2+\cdots+2008^2)$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុចពីរ A និង B ។ បន្ទាត់ចល័ត (MN) កាត់តាម A ហើយជួបរង្វង់ធំត្រង់ M និងរង្វង់តូចត្រង់ N ។

បង្ហាញថា $\frac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរកាលណា (MN) វិលជុំវិញចំណុច A ។

៣-(១០ពិន្ទុ) គេមានសមភាព : $14^2=(6\times1^2+6\times1+2)^2;15^2=(6\times1^2+6\times1+3)^2$

$$38^2=(6\times2^2+6\times2+2)^2;39^2=(6\times2^2+6\times2+3)^2$$

$$74^2=(6\times3^2+6\times3+2)^2;75^2=(6\times3^2+6\times3+3)^2$$ ។

ដោយសង្កេតឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះ ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅនោះផង :

$2^2+3^2+4^2+14^2=15^2$; $4^2+5^2+6^2+38^2=39^2$; $6^2+7^2+8^2+74^2=75^2$ ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}-5^{2008}-6^{2008}-7^{2008}-8^{2008}-9^{2008}$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

៥-(១៥ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1;u_2=1;u_3=-1$ និង $u_n=u_{n-1}\times u_{n-3}$ ចំពោះ $n\ge4$ ។

រកតម្លៃប្រាំមួយតួដំបូង និងតួ u_{2008} នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៦-(១៥ពិន្ទុ) គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួន $x_1;x_2;x_3;\cdots$ ដែលកំណត់ដោយ $x_1=1;x_2=1$ និង $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ ចំពោះ $n\ge3$ ។

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនោះ ។

ខ. គេយក $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់2 ។ បង្ហាញថា $A^n=\begin{bmatrix}x_{n+1}&x_n\\x_n&x_{n-1}\end{bmatrix}$ ចំពោះ $n=2;3;4;\cdots$ ។

៧-(១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ ជួបជ្រុង [BC] ត្រង់ D ហើយជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ E ។ តាមចំណុច D គេគូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង [AB] និង [AC] រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច M និង N ។

បង្ហាញថាចតុកោណ AMEN និងត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា ។

៨-(១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ មានមេគុណ a_i ចំពោះគ្រប់ $0\le a_i\le a_0$ ដែល $i=1;2;3;\cdots;n$ ។ គេយក $(f(x))^2=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}$ ។

បង្ហាញថា $b_{n+1}\le\frac{1}{2}(f(1))^2$ ។

50

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ 2008 (I)

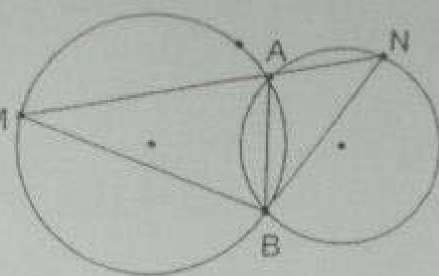
សំរាប់ថ្ងៃទី ០៦.០៥.០៨

១-(៥ពិន្ទុ) គណនា $S_{2008} = \left(1(2+1) + 2(2+2) + \cdots + 2008(2+2008)\right) - \left(1^2 + 2^2 + \cdots + 2008^2\right)$ ២ពិន្ទុ

$$S_{2008} = 2(1+2+\cdots+2008) + (1^2+2^2+\cdots+2008^2) - (1^2+2^2+\cdots+2008^2)$$

$$= 2(1+2+\cdots+2008) = 2008\times 2009 = 2008^2 + 2008$$ ៣ពិន្ទុ

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\frac{BM}{BN}$ ថេរ :



៣ពិន្ទុ

ក្នុងរង្វង់ធំ $\hat{AMB} = \overset{\frown}{AB}$ ថេរ

ក្នុងរង្វង់តូច $\hat{ANB} = \overset{\frown}{AB}$ ថេរ ២ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស : $\frac{BM}{\sin \hat{ANB}} = \frac{BN}{\sin \hat{AMB}}$ ៣ពិន្ទុ

គេទាញបាន $\frac{BM}{BN} = \frac{\sin \hat{ANB}}{\sin \hat{AMB}}$ ថេរ ២ពិន្ទុ

៣-(១០ពិន្ទុ) - ទាញរករូបមន្តទូទៅ :

គេសង្កេតឃើញថា :

$2^2+3^2+4^2+14^2 = (2\times1)^2+(2\times1+1)^2+(2\times1+2)^2+(6\times1^2+6\times1+2)^2 =$

$15^2 = (6\times1^2+6\times1+3)^2$ (គឺ $n=1$) ២ពិន្ទុ

$4^2+5^2+6^2+38^2 = (2\times2)^2+(2\times2+1)^2+(2\times2+2)^2+(6\times2^2+6\times2+2)^2 =$

$39^2 = (6\times2^2+6\times2+3)^2$ (គឺ $n=2$) ១ពិន្ទុ

$6^2+7^2+8^2+74^2 = (2\times3)^2+(2\times3+1)^2+(2\times3+2)^2+(6\times3^2+6\times3+2)^2 =$

$75^2 = (6\times3^2+6\times3+3)^2$ (គឺ $n=3$) ១ពិន្ទុ

ជាទូទៅ : $(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+(6n^2+6n+2)^2 = (6n^2+6n+3)^2$ ចំពោះ $n = 1;2;3;\cdots$ ២ពិន្ទុ

- ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ :

$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+(6n^2+6n+2)^2 = 36n^4+72n^3+72n^2+36n+9$ ២ពិន្ទុ

$(6n^2+6n+3)^2 = 36n^4+72n^3+72n^2+36n+9$

ដូចនេះរូបមន្តពិត ចំពោះ $n = 1;2;3;\cdots$ ។ ១ពិន្ទុ

៤-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 5 :

គេមាន $A = (1^{2008} - 6^{2008}) + (2^{2008} - 7^{2008}) + (3^{2008} - 8^{2008}) + (4^{2008} - 9^{2008}) - 5^{2008}$ [illegible]

$= (1-6)k_1 + (2-7)k_2 + (3-8)k_3 + (4-9)k_4 - 5k_5$ ៣ពិន្ទុ

$= (-5)k_1 + (-5)k_2 + (-5)k_3 + (-5)k_4 - 5k_5$

$= 5(-k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5)$ ២ពិន្ទុ

ដែល k_i ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន

$A = 5K$ ដែល K ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន។ ២ពិន្ទុ

៥-(១៥ពិន្ទុ) - រក21 តួដំបូង :

$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = -1$

$u_4 = u_3 \times u_1 = -1 \times 1 = -1$ ២ពិន្ទុ

$u_5 = u_4 \times u_2 = -1 \times 1 = -1$

$u_6 = u_5 \times u_3 = -1(-1) = 1$ ២ពិន្ទុ

$u_7 = u_6 \times u_4 = 1(-1) = -1$

តាមរបៀបដូចគ្នា: ២ពិន្ទុ

$u_8 = 1; u_9 = 1; u_{10} = -1; u_{11} = -1; u_{12} = -1; u_{13} = 1; u_{14} = -1$ ២ពិន្ទុ

$u_{15} = 1; u_{16} = 1; u_{17} = -1; u_{18} = -1; u_{19} = -1; u_{20} = 1; u_{21} = -1$

- រកតួ u_{2008}

គេសង្កេតឃើញថា: $u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = -1; u_4 = -1; u_5 = -1; u_6 = 1; u_7 = -1$

$u_8 = 1; u_9 = 1; u_{10} = -1; u_{11} = -1; u_{12} = -1; u_{13} = 1; u_{14} = -1$ ២ពិន្ទុ

$u_{15} = 1; u_{16} = 1; u_{17} = -1; u_{18} = -1; u_{19} = -1; u_{20} = 1; u_{21} = -1$

គេបាន (u_n) ជាស៊ីតខួបដែលខួបនីមួយៗមាន 7 តួ។ ២ពិន្ទុ

$2008 = 7 \times 286 + 6$ នេះបញ្ជាក់ថា u_{2008} ជាតួទី 6នៅក្នុងខួបទី287 ។ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $u_{2008} = 1$ ។

៦-(១៥ពិន្ទុ ក. រកដប់តួដំបូងនៃស៊ីត :

$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 5; x_6 = 8; x_7 = 13; x_8 = 21; x_9 = 34; x_{10} = 55$ ៥ពិន្ទុ

ខ.បង្ហាញថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n = 2 ; 3 ; 4 ; \cdots$:

- ចំពោះ $n = 2$:

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2+1} & x_2 \\ x_2 & x_{2-1} \end{bmatrix}$ ពិត ៣ពិន្ទុ

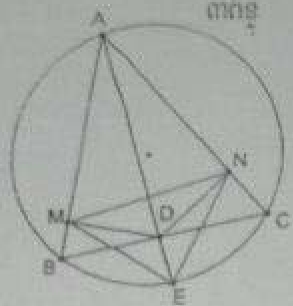
- ឧបមាថា ទំនាក់ទំនងពិតដល់ $n = p$: $A^p = \begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p \\ x_p & x_{p-1} \end{bmatrix}$ ៣ពិន្ទុ

- សិក្សាចំពោះ $n = p+1$:

$A^{p+1} = A^p \cdot A = \begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p \\ x_p & x_{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p+1}+x_p & x_{p+1} \\ x_p+x_{p-1} & x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p+2} & x_{p+1} \\ x_{p+1} & x_p \end{bmatrix}$ ពិត ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n = 2 ; 3 ; 4 ; \cdots$

ឆ-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា AMEN និង ΔABC មានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា :



៣ពិន្ទុ

គេមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin\alpha$ ដែល $B\hat{A}C = \alpha$ ២ពិន្ទុ

ត្រីកោណកែង $AMD \cong AND$ ហើយគេបាន $AD \perp MN$

គេបាន $S_{AMEN} = \frac{1}{2} AE \times MN$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $A\hat{C}D = A\hat{E}B$

$C\hat{A}D = E\hat{A}B$

ដូចនេះ ΔACD ដូច ΔAEB តាមករណីទី១

វិបាក $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$ នាំឱ្យ $AB \times AC = AE \times AD$ (I) ២ពិន្ទុ

ចតុកោណ AMDN ចារឹកក្នុងរង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត $[AD]$ មួយ ព្រោះ $\hat{M} = \hat{N} = 90^0$ ២ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស ក្នុង ΔAMN : $\frac{MN}{\sin\alpha} = AD$

តាម(I) គេបាន $AB \times AC = AE \times \frac{MN}{\sin\alpha}$ ២ពិន្ទុ

$$\frac{1}{2} AB \times AC \sin\alpha = \frac{1}{2} AE \times MN$$ ២ពិន្ទុ

$$S_{ABC} = S_{AMEN}$$

ជ-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $b_{n+1} \le \frac{1}{2}(f(1))^2$:

ដោយ $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n+1} x^{n+1} + \cdots + \cdots + b_{2n} x^{2n} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)^2$

នោះតាមរបៀបប្រដូចលេខមេគុណនៃ x^{n+1} គេបាន : $b_{n+1} = a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + a_3 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_2 + a_n a_1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $b_{n+1} \le a_1 a_0 + a_2 a_0 + a_3 a_0 + \cdots + a_{n-1} a_0 + a_n a_0$ ២ពិន្ទុ

$2b_{n+1} \le a_1(a_0 + a_n) + a_2(a_0 + a_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(a_0 + a_2) + a_n(a_0 + a_1) \le$ ២ពិន្ទុ

$\le a_1(a_0 + \cdots + a_n) + a_2(a_0 + \cdots + a_n) + \cdots + a_{n-1}(a_0 + \cdots + a_n) + a_n(a_0 + \cdots + a_n)$ ២ពិន្ទុ

$\le (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \le$ ២ពិន្ទុ

$\le (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ ២ពិន្ទុ

$\le (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)^2 = (f(1))^2$

$b_{n+1} \le \frac{1}{2}(f(1))^2$ ៣ពិន្ទុ

Chhun Sengnaom

ថ្ងៃទី ០៦ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០០៨

ប្រធានក្រុមកែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

53

ឌី ស៊ីវាធារី

2008

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ខេត្តក្រុង

ផ្នែកគណិតវិទ្យា គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២ ឆ្នាំសិក្សា ២០០៧_២០០៨

សម័យប្រឡង: ០៦.០៥.០៨

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ ថ្ងៃទី ០៨.០៥.០៨ (រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<7$ ហើយ $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>4$ ។

២-(១០ពិន្ទុ) គេឱ្យពហុធា $g(n)=n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ ចំពោះ $n=1;2;3;\cdots$ ។

បង្ហាញថា $g(n)$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានណាមួយឡើយ ។

៣-(១០ពិន្ទុ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន :

$$f(n)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \text{ និង } g(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \text{ ។}$$

បង្ហាញថា $f(n)=g(n)$ ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៤-(១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរ : $X=111\cdots11$ ដែលមានលេខ 1 ចំនួន m ដង

និង $Y=100\cdots05$ ដែលមានលេខ 0 ចំនួន $m-1$ ដង ។

បង្ហាញថា $1+XY$ ជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយគណនាឫសការេវិជ្ជមាននៃ $1+XY$ ។

៥-(១៥ពិន្ទុ) គេតាង $s(n)$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $0;1;1;2;2;3;3;4;4;\cdots;k;k;k+1;k+1;\cdots$ ។

ក. គណនា $s(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $s(a+b)-s(a-b)=ab$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $a>b$ ។

៦-(១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យត្រីកោណកែង ABC មួយ ដែលមាន $AC=1$, $\hat{ACB}=90^\circ$ និង $\hat{BAC}=x$ ។ D ជាចំណុចមួយនៃ អ៊ីប៉ូតេនុស $[AB]$ ហើយដែល $AD=1$ ។ E ជាចំណុចមួយនៃ $[BC]$ ហើយដែល $\hat{EDC}=x$ ។ បន្ទាត់ (EF) កែងនឹង $[BC]$ ត្រង់ E ហើយជួប $[AB]$ ត្រង់ F ។ គណនា $\lim\limits_{x\to0} EF$ ។

៧-(១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នា p ; q និង r ។

បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p}$; $\sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនអាចជាតួបី (មិនចាំបាច់ជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ) នៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។

៨-(១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a ; b និង c ហើយចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត O មួយ ។ គេសង់បន្ទាត់បីប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ហើយ ស្របទៅនឹងជ្រុងទាំងបី នៃត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ប៉ះនីមួយៗ និងជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ ABC ដែលមិនស្រប នឹងវា ផ្គុំគ្នាបង្កើតបានត្រីកោណថ្មី ។ ត្រីកោណថ្មីទាំងបីនោះ ចារឹកក្រៅរង្វង់បីផ្សេងគ្នា ។

បង្ហាញថា ផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ទាំងបួនស្មើនឹង :

$$\left(\frac{\pi S^2}{p^4}\right)\left(p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right)$$ (ដែល S ជាផ្ទៃក្រឡា និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

 2008 (II)

១-(៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<7$ ហើយ $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>4$:

គេដឹងថា : $\sqrt{7}<\sqrt{9}$; $\sqrt[3]{7}<\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{9}<\sqrt[4]{16}$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<\sqrt{9}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[4]{16}=7$

តាមរបៀបដូចគ្នា : $\sqrt{4}=2$; $\sqrt[3]{4}>\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{4}>\sqrt[4]{1}$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>\sqrt{4}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}=4$

២-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $g(n)$ មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន :

$(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<n^4+2n^3+3n^2+2n+1$ ៣ពិន្ទុ

$(n^2+n)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<(n^2+n+1)^2$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $(n^2+n)^2$ និង $(n^2+n+1)^2$ ជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរតគ្នា នោះគេបាន : ៤ពិន្ទុ

$g(n)$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានណាមួយឡើយ ។

របៀបទី២ :

$$g(n)=(n^4+2n^3+n^2)+(n^2+2n+1)$$
$$=n^2(n+1)^2+(n+1)^2$$ ៥ពិន្ទុ
$$=(n+1)^2(n^2+1)$$

ដោយ n^2+1 គ្មានឫសនៅក្នុង Z នោះ n^2+1 មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានណាមួយឡើយ ។ ៥ពិន្ទុ

$g(n)$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានណាមួយឡើយ ។

៣-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $f(n)=g(n)$ ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនសូន្យ n :

- ចំពោះ $n=1$: $f(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $g(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(1)=g(1)$ ពិត

- ឧបមាថា សមភាពពិតដល់ $n=k$: $f(k)=g(k)$ ២ពិន្ទុ

- សិក្សាចំពោះ $n=k+1$

$$f(k+1)-f(k)=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2} \qquad (1)$$ ២ពិន្ទុ

$$g(k+1)-g(k)=\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2} \qquad (2)$$ ២ពិន្ទុ

តាម (1) & (2) គេបាន $f(k+1)-f(k)=g(k+1)-g(k)$

ហើយ $f(k+1)=g(k+1)$ ពិត ព្រោះ $f(k)=g(k)$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(n)=g(n)$ ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនសូន្យ n ។

[illegible]

$\equiv 1 \pmod 3$

[illegible]

$\equiv 1+2 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

① ও ② : $\left[\frac{1}{3}(10^n+2)\right]^2$ [illegible]

$\Rightarrow xy+1$ বর্গ হবে.

অন্যভাবে :

$$\sqrt{1+xy} = \frac{1}{3}(10^n+2)$$

$$= \frac{1}{3}(100\ldots02)$$

$$= \frac{1}{3}(\underbrace{100\ldots}_{n-1}2)$$ [illegible]

$$= 33\ldots34$$

$$f(n) = 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} = f(n)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$g(n) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n} - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n}\right) - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

[illegible]

$$= f(n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) [illegible] - \left(1+\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}\right)$$

[illegible]

56

របៀបទី២ :

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$ ៣ពិន្ទុ

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$ ៣ពិន្ទុ

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=g(n)$$ ២ពិន្ទុ

៤-(១៥ពិន្ទុ) -បង្ហាញថា $1+XY$ ជាការេនៃមួយចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប:

គេបាន $X=1+10+10^2+\cdots+10^{m-1}=\dfrac{10^m-1}{9}$ ២ពិន្ទុ

$X = 1.1.1\ldots1$
$=\frac{1}{9}(9.9\ldots9)$
$=\frac{1}{9}(10^m-1)$

$Y=10^m+5$ ២ពិន្ទុ

$$1+XY=1+\left(\frac{10^m-1}{9}\right)(10^m+5)$$

$$=\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2$$ ២ពិន្ទុ

$$=\left(\frac{10^m-10+12}{3}\right)^2$$ ២ពិន្ទុ

$$=\left(\frac{10(10^{m-1}-1)}{3}+4\right)^2$$ ២ពិន្ទុ

$$=\left(3(10^{m-1}+10^{m-2}+\cdots+10^2+10)+4\right)^2$$

$1+XY=(333\cdots34)^2$ ដែលមានលេខ 3 ចំនួន $m-1$ ដង ២ពិន្ទុ

- រកឫសការេវិជ្ជមាននៃ $1+XY$: $\sqrt{1+XY}=333\cdots34$ ដែលមានលេខ 3 ចំនួន $m-1$ ដង ៣ពិន្ទុ

៥-(១៥ពិន្ទុ) ក. គណនា $s(n)$:

- បើ n ជាចំនួនគត់គូ :

$$s(n)=\left(0+1+2+3+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)+\left(1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(1+\frac{n}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{1}{4}n^2$$ ២ពិន្ទុ

- បើ n ជាចំនួនគត់សេស :

$$s(n)=\left(0+1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)+\left(1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$=2\times\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(1+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{4}(n^2-1)$$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $s(n)=\frac{1}{4}n^2$ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់គូ

$s(n)=\frac{1}{4}(n^2-1)$ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់សេស

$S(n) = 0+1+1+2+2+\dots+(k-1)+(k-1)+k$

$= 2(1+2+\dots+(k-1))+k$

$= 2\,\dfrac{(k-1)\cdot k}{2}+k = k^2 = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2$

n odd, $n = 2k+1$

$S(n) = 0+1+1+2+2\dots+(k-1)+(k-1)+k+k$

$= 2(1+2+\dots+k)$

$= 2\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right) = \dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n^2-1}{4}$

ខ. បង្ហាញថា $s(a+b)-s(a-b)=ab$:

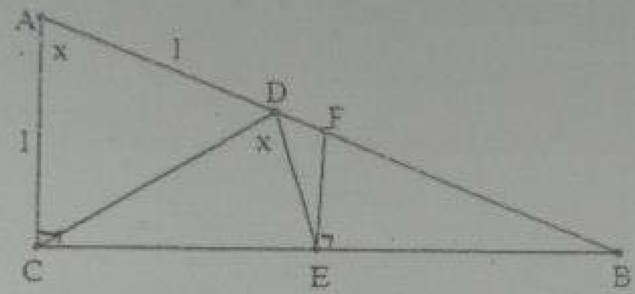
គេមាន $(a+b)+(a-b)=2a$ ជាចំនួនគត់គូ

នេះបញ្ជាក់ថា $a+b$ & $a-b$ ជាចំនួនគូទាំងពីរ ឬសេសទាំងពីរ ។ ៣ពិន្ទុ

- បើ $a+b$ & $a-b$ ជាចំនួនគូ : $s(a+b)-s(a-b)=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=ab$ ២ពិន្ទុ

- បើ $a+b$ & $a-b$ ជាចំនួនសេស : $s(a+b)-s(a-b)=\frac{1}{4}\left((a+b)^2-1\right)-\frac{1}{4}\left((a-b)^2-1\right)=ab$ ២ពិន្ទុ

ង- ១៥ពិន្ទុ៖ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} EF$:



៣ពិន្ទុ

ដោយ $(EF)\parallel(AC)$ គេបាន $\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow EF=\frac{BE}{BC}$ ព្រោះ $AC=1$ ២ពិន្ទុ

តែ $\frac{BE}{BC}=\frac{BE}{BE+EC}\Rightarrow\frac{BC}{BE}=\frac{BE+EC}{BE}=1+\frac{EC}{BE}$

$EF=1:\left(1+\frac{EC}{BE}\right)$ (1) ២ពិន្ទុ

ក្នុង ΔACD : $\hat{ACD}=\hat{ADC}=90^\circ-\frac{x}{2}$

គេទាញបាន $\hat{DCE}=\frac{x}{2}$ ២ពិន្ទុ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុង ΔCDE : $\frac{CE}{\sin x}=\frac{DE}{\sin\frac{x}{2}}$

$\frac{CE}{DE}=\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=2\cos\frac{x}{2}\Rightarrow CE=2\cos\frac{x}{2}\times DE$ ២ពិន្ទុ

ក្នុង ΔBDE : $\hat{EBD}=90^\circ-x$; $\hat{BDE}=90^\circ-\frac{x}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុង ΔBDE : $\frac{DE}{BE}=\frac{\sin(90^\circ-x)}{\sin(90^\circ-\frac{x}{2})}=\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow BE=\frac{DE\times\cos\frac{x}{2}}{\cos x}$ ២ពិន្ទុ

តាម (1) គេបាន $EF=1:\left(1+\frac{EC}{BE}\right)=\frac{1}{1+2\cos x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}EF=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+2\cos x}\right)=\frac{1}{3}$ ២ពិន្ទុ

ច- ១៥ពិន្ទុ៖ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q},\sqrt[3]{r}$ មិនអាចជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត .

ឧបមាថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q},\sqrt[3]{r}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ ២ពិន្ទុ

នោះមានចំនួនពិត a, d និងចំនួនគត់ b, c ដែល $\sqrt[3]{p}=a$; $\sqrt[3]{q}=a+bd$; $\sqrt[3]{r}=a+cd$ ២ពិន្ទុ

$d=\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{b}=\frac{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}{c}$ ២ពិន្ទុ

59

$a(\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p})=b(\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p})$

$(b-c)\sqrt[3]{p}=-c\sqrt[3]{q}+b\sqrt[3]{r}$ ២ពិន្ទុ

តាង $\alpha=b-c\ ;\ \beta=-c\ ;\ \gamma=b$ ដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ ២ពិន្ទុ

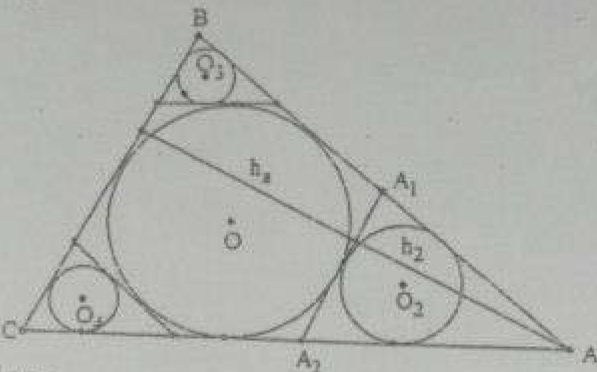
គេបាន $\alpha\sqrt[3]{p}=\beta\sqrt[3]{q}+\gamma\sqrt[3]{r}$ ហើយ $\alpha^3p=\beta^3q+\gamma^3r+3\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{pqr}$ ២ពិន្ទុ

$\sqrt[3]{pqr}=\dfrac{\alpha^3p-\beta^3q-\gamma^3r}{3\alpha\beta\gamma}$ ដែលផ្ទុយពីការពិតព្រោះអង្គទី១ អសនិទាន តែអង្គទី២ សនិទាន ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\sqrt[3]{p}\ ;\sqrt[3]{q}\ ;\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយទេ ។

៨-(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទាំងបួននោះមានផលបូកផ្ទៃក្រឡា ស្មើនឹង ១ពិន្ទុ

$$\Sigma=\pi\left(\frac{S^2}{p^4}\right)\left(p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right):$$



៣ពិន្ទុ

តាង : r_1 ជាកាំនៃរង្វង់ផ្ចិត O

$r_2\ ;\ r_3\ ;\ r_4$ ជាកាំនៃរង្វង់ថ្មីបីរៀងគ្នា

$h_a\ ;\ h_b\ ;\ h_c$ ជាកំពស់នៃ ΔABC ចំពោះជ្រុង $a\ ;b\ ;c$ រៀងគ្នា

$h_2\ ;\ h_3\ ;\ h_4$ ជាកំពស់នៃត្រីកោណថ្មីដែលគូសពីកំពូល $A\ ;B\ ;\ C$ រៀងគ្នា

(A_1A_2) ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ O ដែលស្របជ្រុង $[BC]$ ។

គេបាន :

ផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ទាំងបួន $\sum=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2+\pi r_4^2$ (1) ២ពិន្ទុ

$h_2=h_a-2r_1\ ;\ h_3=h_b-2r_1\ ;\ h_4=h_c-2r_1$

$\Delta AA_1A_2\sim\Delta ABC\ :\ \dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{h_a-2r_1}{h_a}=1-\dfrac{2r_1}{h_a}$

$r_2=r_1-\dfrac{2r_1^2}{h_a}$ (2) ២ពិន្ទុ

តែ $S=pr_1\Rightarrow r_1=\dfrac{S}{p}$ ២ពិន្ទុ

$h_a=\dfrac{2S}{a}$ $h_b=\dfrac{2S}{b}$ $h_c=\dfrac{2S}{c}$

(2) អាចសរសេរ $r_2=\dfrac{S}{p}-2\left(\dfrac{S}{p}\right)^2\left(\dfrac{a}{2S}\right)=\dfrac{S(p-a)}{p^2}$ ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចខាងលើ : $r_3=\dfrac{S(p-b)}{p^2}$ $r_4=\dfrac{S(p-c)}{p^2}$ ២ពិន្ទុ

(1) អាចសរសេរ $\sum=\pi\left(\dfrac{S^2}{p^2}+\dfrac{S^2(p-a)^2}{p^4}+\dfrac{S^2(p-b)^2}{p^4}+\dfrac{S^2(p-c)^2}{p^4}\right)$ ៦ពិន្ទុ

$\sum=\pi\left(\dfrac{S^2}{p^4}\right)\left[p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right]$

ថ្ងៃទី ០៨ ខែ មករា ឆ្នាំ ២០០៨

01.04.2009

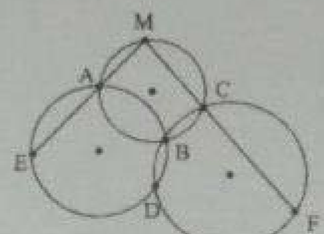
ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០០៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ០១-០៤-០៩ (រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០)

១. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យរង្វង់បីដែលកាត់គ្នាពីរៗដូចរូបខាងក្រោម ។ សង់រូបឡើងវិញហើយបង្ហាញថាចំណុច E; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។



២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\cdots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$ ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ $(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$ ។

៤. (១៥ពិន្ទុ) គេតាង $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$

៥. (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}\,g(x)$ ។

ក. គេតាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1=\frac{1}{2}$ និង $u_n=\left(\frac{2n-3}{2n}\right)u_{n-1}$ ចំពោះ $n=2;3;\cdots$ ។

បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៧. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង ABC មួយមានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC=a$ និងកម្ពស់ $AH=h$ ។ គេចែក $[BC]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នា ដែល n ជាចំនួនគត់សេស ។ គេយក $[PQ]$ ជាចំណែកដែលនៅកណ្តាលគេ ហើយដែលរង្វាស់មុំ $P\hat{A}Q=x$ ។

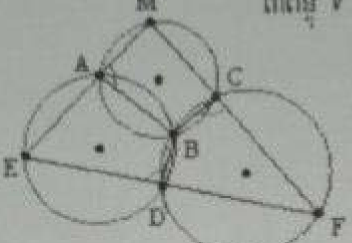
បង្ហាញថា $\tan x=\frac{4nh}{a(n^2-1)}$ ។

61

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ 2009 (I)

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០១-០៤-២០០៩

១. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាចំណុច E ; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ :



៣ពិន្ទុ

គេមាន

$\hat{EDB} = \hat{MAB}$ ២ពិន្ទុ

$\hat{MAB} = \hat{BCF}$

គេបាន $\hat{EDB} = \hat{BCF}$ ២ពិន្ទុ

តែ $\hat{BCF} + \hat{BDF} = 180^\circ$ នោះ $\hat{EDB} + \hat{BDF} = 180^\circ$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំណុច E ; D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + \cdots + (n-1)^{2009} + n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n :

គេមាន

$S_n = 1^{2009} + 2^{2009} + 3^{2009} + \cdots + (n-1)^{2009} + n^{2009}$

$2S_n = (n^{2009} + 2^{2009}) + ((n-1)^{2009} + 3^{2009}) + \cdots + +(2^{2009} + n^{2009}) + 1^{2009} + 1^{2009}$ ២ពិន្ទុ

$= (n+2)k_1 + (n+2)k_2 + \cdots + (n+2)k_{n-1} + 2$ ៣ពិន្ទុ

$= (n+2)k + 2$ ដែល $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេទាញបាន $2S_n$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ S_n ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ២ពិន្ទុ

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x) = x^2 - 3x + 3$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x) = x$ នោះ $f(f(x)) = x$:

បើ $f(x) = x$ នោះ $f(f(x)) = f(x)$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(f(x)) = x$ ព្រោះ $f(x) = x$

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x) = x$: ៣ពិន្ទុ

សមីការ $f(x) = x$ អាចសរសេរជា $x^2 - 4x + 3 = 0$ ដែលមានឫស $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

ទាញ រកឫសនៃសមីការ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$:

សមីការ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$ អាចសរសេរជា ៣ពិន្ទុ

$f(f(x)) = x$ ដែលជាសមីការផលវិបាកនៃ $f(x) = x$

គេទាញបាន $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ជាឫសនៃ $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$

ក៏ $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ជាឫសនៃ $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ ៣ពិន្ទុ

$(x^2 - 4x + 3)(x - 1)^2 = 0$

62

សមីការមានឫស $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ ៣ពិន្ទុ

៤. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$

៣ពិន្ទុ

- ចំពោះ n = 1 : $1+\frac{2009}{1}=\frac{2010}{1}$ ជាសមភាពដែលពិត

- ឧបមាថា សមភាពពិតដល់ n = k មានន័យថា : ៣ពិន្ទុ

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{k!}$$

- ពិនិត្យចំពោះ n = k + 1

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}=$$

៣ពិន្ទុ

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{k!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$

៣ពិន្ទុ

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(k+1)}{(k+1)!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(2009+(k+1))}{(k+1)!}$$ ក៏ពិតចំពោះ n = k + 1 ៣ពិន្ទុ

៥. (១៥ពិន្ទុ) ក. គណនា $g(x+1); g(x+2); g(x+3); g(x+4)$:

គេមាន $g(x+1)=\sqrt{2}\,g(x)-g(x-1)$

ដោយ $g(x-1)=q$; $g(x)=p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ នោះគេបាន

$g(x+1)=\sqrt{2}\,p-q$ ២ពិន្ទុ

$g(x+2)=\sqrt{2}\,g(x+1)-g(x)=\sqrt{2}(\sqrt{2}\,p-q)-p=p-\sqrt{2}\,q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+3)=\sqrt{2}\,g(x+2)-g(x+1)=\sqrt{2}(p-\sqrt{2}\,q)-\sqrt{2}p+q=-q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+4)=\sqrt{2}\,g(x+3)-g(x+2)=\sqrt{2}(-q)-p+\sqrt{2}\,q=-p=-g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប : ២ពិន្ទុ

$g(x+5)=\sqrt{2}\,g(x+4)-g(x+3)=-\sqrt{2}\,p+q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+6)=\sqrt{2}\,g(x+5)-g(x+4)=\sqrt{2}(-\sqrt{2}\,p+q)-(-p)=\sqrt{2}\,q-p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+7)=\sqrt{2}\,g(x+6)-g(x+5)=\sqrt{2}(\sqrt{2}\,q-p)-(-\sqrt{2}p+q)=q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

$g(x+8)=\sqrt{2}\,g(x+7)-g(x+6)=\sqrt{2}\,q-(\sqrt{2}\,q-p)=p=g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប ។

របៀបទី២ : តាមសំណួរខាងលើ $g(x+4)=-g(x)$ នោះគេអាចសរសេរ : 4ពិន្ទុ

$g(x+8)=g((x+4)+4)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$

$g(x+8)=-g(x+4)=-(-g(x))=g(x)$ ៤ពិន្ទុ

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ៣ពិន្ទុ

- ចំពោះ $k\ge 2$ គេបាន $2ku_k=2ku_{k-1}-3u_{k-1}$ ហើយ $u_{k-1}=2(k-1)u_{k-1}-2ku_k$

63

(+5)

ដោយប្តូរតម្លៃ $k = 1;2;\cdots;n+1$

$u_1 = 2u_1 - 4u_2$ ៣ពិន្ទុ

$u_2 = 4u_2 - 6u_3$ ✓

$\vdots$

.... ៣ពិន្ទុ

$u_{n-1} = 2(n-1)u_{n-1} - 2nu_n$

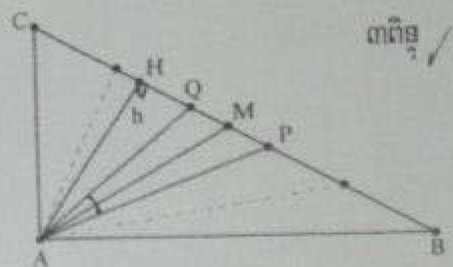
$u_n = 2nu_n - 2(n+1)u_{n+1}$

៣ពិន្ទុ

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 2u_1 - (2n+2)u_{n+1} = 1 - (2n+2)u_{n+1}$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n នោះ $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ✓

ឥ. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\tan x = \dfrac{4nh}{a(n^2-1)}$:



៣ពិន្ទុ ✓

តាង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។

គេបាន $x = P\hat{A}Q = P\hat{A}H - Q\hat{A}H$ ២ពិន្ទុ

$$\tan x = \tan\left(P\hat{A}H - Q\hat{A}H\right)$$

$$= \frac{\tan P\hat{A}H - \tan Q\hat{A}H}{1 + \tan P\hat{A}H \times \tan Q\hat{A}H}$$ ៣ពិន្ទុ

តែ $\tan P\hat{A}H = \dfrac{HP}{HA}$; $\tan Q\hat{A}H = \dfrac{HQ}{HA}$

$$\tan x = \frac{(HP - HQ)\times HA}{HA^2 + HP\times HQ} = \frac{PQ\times HA}{HA^2 + HP\times HQ} \qquad (1)$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $HP = HM + MP = HM + \dfrac{a}{2n}$ និង $HQ = HM - MQ = HM - \dfrac{a}{2n}$ ៣ពិន្ទុ

$$HM^2 = AM^2 - AH^2 = \frac{a^2 - 4h^2}{4}$$

$$HP\times HQ = HM^2 - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2-4h^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2}{4n^2}$$ ៣ពិន្ទុ

$$\tan x = \frac{ah}{n} \times \frac{4n^2}{4n^2h^2 + a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2} = \frac{4nh}{a(n^2-1)}$$ ៣ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០០៨

ប្រធានក្រុមកែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

64

03.04.2009

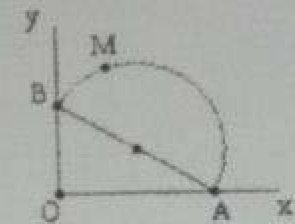
ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០០៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៣-០៤-០៩ (រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០)

១. (១០ពិន្ទុ) គេឱ្យចំណុច M មួយនៃកន្លះរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត [AB] ។
រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច M កាលណា A រំកិលលើជ្រុង [Ox) និង B រំកិលលើជ្រុង [Oy) នៃមុំកែង xOy មួយដោយរក្សាប្រវែង AB ថេរ ។



២. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ✓

៣. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ។
បង្ហាញថា $a - b$; $2a + 2b + 1$ និង $3a + 3b + 1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

៤. (១៥ពិន្ទុ) សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ $\mathrm{Card}(P(E_n))$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$ ។ តាមវិធានដោយកំណើន បង្ហាញថា $\mathrm{Card}(P(E_n)) = 2^n$ ។

៥. (១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ ដែល $a + b = (a\tan A + b\tan B)\tan\frac{C}{2}$ ។
បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) ស៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = 1 + x_1x_2\cdots x_n$ ចំពោះ $n = 1, 2, \cdots$ ។
គេតាងផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}$ ។
គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

៧. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ $f(x;y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y :

(i) $f(0;y) = 1 + y$

(ii) $f(x+1;0) = f(x;1)$

(iii) $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$ ។

ក. គណនា $f(1;n), f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $f(4;2009)$ ។

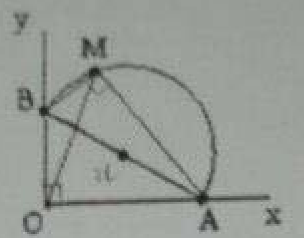
chhun Sengram

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

2009(II)

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០៣_០៤_០៩

១.(១០ពិន្ទុ) រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច M :



ចតុកោណ AMBO ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ ២ពិន្ទុ

គេតាង $\widehat{MAB} = \alpha$ ថេរ $AB = 2R$ ថេរ

គេបាន $\widehat{MOB} = \widehat{MAB} = \alpha$ ថេរ ២ពិន្ទុ

បានន័យថា M នៅលើ $[OM)$ ដែល $\widehat{MOy} = \alpha$ ២ពិន្ទុ

លីមីត: - បើ $A = O$ នោះ $B = B_1$ ដែល $OB_1 = 2R$ ហើយ $M = M_1$ ដែល $OM_1 = 2R\cos\alpha$ ២ពិន្ទុ

- បើ $B = O$ នោះ $A = A_1$ ដែល $OA_1 = 2R$ ហើយ $M = M_2$ ដែល $OM_2 = 2R\sin\alpha$

សន្និដ្ឋាន :

សំណុំចំណុចនៃចំណុច M គឺជា $[M_1M_2]$ នៃ $[OM)$ ដែល $\widehat{MOy} = \alpha$, $OM_1 = 2R\cos\alpha$ និង $OM_2 = 2R\sin\alpha$ ។ ២ពិន្ទុ

២.(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n :

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $3^2 + 2^{6\times1-5} = 11$ ចែកដាច់នឹង11 : ពិត ២ពិន្ទុ

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺថា $3^{2k} + 2^{6k-5} = 11p$, $p \in Z^+$ ៣ពិន្ទុ

នាំឱ្យ $3^{2k} = 11p - 2^{6k-5}$, $p \in Z^+$ ២ពិន្ទុ

ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$ គេបាន $3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)-5} = 9\times3^{2k} + 2^6\times2^{6k-5}$

$= 9\times11p - 9\times2^{6k-5} + 2^6\times2^{6k-5} = 11(9p + 5\times2^{6k-5})$ ចែកដាច់នឹង11 : ពិត ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣.(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $a - b$; $2a + 2b + 1$ និង $3a + 3b + 1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ :-

ដោយ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ នោះគេបាន : ៣ពិន្ទុ

$a^2 = a - b + 3a^2 - 3b^2 = (a-b)(3a+3b+1)$

$b^2 = a - b + 2a^2 - 2b^2 = (a-b)(2a+2b+1)$

បើ δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $3(a+b)+1$ & $2(a+b)+1$ នោះ $\delta \mid (6a+6b+3-6a-6b-2)$ គឺ $\delta \mid 1$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ $PGCD(3(a+b)+1;2(a+b)+1) = 1$ ហើយ $PGCD(a^2;b^2) = a - b$

ម្យ៉ាងទៀត គេតាង $d = PGCD(a;b)$ នោះ $a = dp; b = dq$ ដែល $PGCD(p;q) = 1$ ៣ពិន្ទុ

គេបាន $a^2 = d^2p^2 ; b^2 = d^2q^2$ ៣ពិន្ទុ

ដោយ $PGCD(p^2;q^2) = 1$ នោះ $d^2 = PGCD(a^2;b^2)$ ៣ពិន្ទុ

(66)

គេទាញបាន $a - b = d^2 ; 3a + 3b + 1 = p^2 ; 2a + 2b + 1 = q^2$

៤.(១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $Card(P(E_n)) = 2^n$: ៣ពិន្ទុ

- ចំពោះ $n = 1$: $E_1 = \{a_1\}$ ហើយ $P(E_1) = \{\phi, \{a_1\}\}$ នោះគេបាន $Card(P(E_1)) = 2 = 2^1$ ៣ពិន្ទុ

- ឧបមាថាសំណើពិតដល់ $n = k$: គេបាន $E_k = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$ ហើយ $Card(P(E_k)) = 2^k$ ៣ពិន្ទុ

- ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$: គេបាន $E_{k+1} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}\} = E_k \cup \{a_{k+1}\}$ ៣ពិន្ទុ

ចំពោះ k [illegible] 2^k [illegible] ។ [illegible]

គេបន្ថែមធាតុ a_{k+1} [illegible] 2^k [illegible]

សរុបមកគេបាន $\text{Card}(P(E_{k+1})) = 2^k + 2^k = 2\times 2^k = 2^{k+1}$ ៖ [illegible] $n = k+1$ ។

ដូចនេះ $\text{Card}(P(E_n)) = 2^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 1$ ។ ៣ពិន្ទុ

៥. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត:

ដោយ $a + b = (a\tan A + b\tan B)\tan\frac{C}{2}$ នោះគេបាន :

$a\cos A\cos B\cos\frac{C}{2} + b\cos A\cos B\cos\frac{C}{2} = a\sin A\cos B\sin\frac{C}{2} + b\cos A\sin B\sin\frac{C}{2}$ ២ពិន្ទុ

$a\cos B(\cos A\cos\frac{C}{2} - \sin A\sin\frac{C}{2}) + b\cos A(\cos B\cos\frac{C}{2} - \sin B\sin\frac{C}{2}) = 0$

$a\cos B\cos(A + \frac{C}{2}) + b\cos A\cos(B + \frac{C}{2}) = 0 \qquad (1)$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $A + B + C = \pi$ នោះ $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$

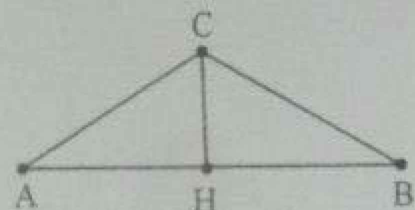
(1) អាចសរសេរ $a\cos B\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2} - \frac{B}{2}) + b\cos A\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} - \frac{A}{2}) = 0$ ២ពិន្ទុ

$-a\cos B\sin(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}) + b\cos A\sin(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}) = 0$ ២ពិន្ទុ

$\sin(\frac{A}{2} - \frac{B}{2})(-a\cos B + b\cos A) = 0$ សមមូល $\sin(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}) = 0$ ឬ $-a\cos B + b\cos A = 0$ ២ពិន្ទុ

- ចំពោះ $\sin(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}) = 0$ គេបាន $A = B$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតត្រង់កំពូល C ។



- ចំពោះ $-a\cos B + b\cos A = 0$ ១ពិន្ទុ

គេបាន $a\cos B = b\cos A$ នាំឱ្យ $HA = HB$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតត្រង់កំពូល C ។

៦. (១៥ពិន្ទុ) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

គេមាន $x_{i+1} = 1 + x_1x_2\cdots x_i$ ដែល $i = 1, 2, \cdots$

$x_{i+1} - 1 = x_1x_2\cdots x_i = x_i((x_1x_2\cdots x_{i-1} + 1) - 1)$ ២ពិន្ទុ

$x_{i+1} - 1 = x_i(x_i - 1)$ ព្រោះ $x_i = x_1x_2\cdots x_{i-1} + 1$

ចំពោះ $i = 2, 3, \ldots$ គេបាន $x_i > 1$ គឺ $x_i - 1 > 0$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ $\frac{1}{x_{i+1} - 1} = \frac{1}{x_i(x_i - 1)} = \frac{1}{x_i - 1} - \frac{1}{x_i}$, $i = 2, 3, \ldots$

$\frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_i - 1} - \frac{1}{x_{i+1} - 1}$, $i = 2, 3, \ldots$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1} + \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1} + \sum\limits_{k=2}^{n}(\frac{1}{x_k - 1} - \frac{1}{x_{k+1} - 1})$ ២ពិន្ទុ

$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 2 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$ ព្រោះ $x_1 = 1, x_2 = 1 + x_1 = 1 + 1 = 2$ ២ពិន្ទុ

តែ $x_{n+1} - 1 = x_1x_2\cdots x_n > x_1(1 + x_1)^{n-1} = 2^{n-1}$ ២ពិន្ទុ

67

នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x_{n+1}-1} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$ ២ពិន្ទុ

៤-(២០ពិន្ទុ)

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

- គេមាន $f(1;n) = f(0;f(1;n-1)) = 1 + f(1;n-1)$; $n \ge 1$ ១ពិន្ទុ

តាង $p_n = f(1;n)$ គេបាន $p_0 = f(1;0) = f(0;1) = 1+1 = 2; p_n = p_{n-1} + 1$ ចំពោះ $n \ge 1$

គេបាន (p_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $p_0 = 2; d = 1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(1;n) = p_n = p_0 + nd = n + 2$

- គេមាន $f(2;n) = f(1;f(2;n-1)) = f(2;n-1) + 2$; $n \ge 1$ ១ពិន្ទុ

តាង $q_n = f(2;n)$ គេបាន $q_0 = f(2;0) = f(1;1) = \underline{p_1} = 1+2 = 3; q_n = q_{n-1} + 2$ ចំពោះ $n \ge 1$

គេបាន (q_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $q_0 = 3; d' = 2$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(2;n) = q_n = q_0 + nd' = 2n + 3$

- គេមាន $f(3;n) = f(2;f(3;n-1) = \underline{2f(3;n-1)+3}$ ចំពោះ $n \ge 1$ ១ពិន្ទុ

$f(3;n) + 3 = 2(f(3;n-1) + 3)$

តាង $u_n = f(3;n) + 3$ នោះគេបាន $u_0 = f(3;0) + 3 = f(2;1) + 3 = (2\times 1 + 3) + 3 = 8$ ២ពិន្ទុ

ហើយ $u_n = 2(f(3;n-1) + 3) = 2u_{n-1}$ ចំពោះ $n \ge 1$ ១ពិន្ទុ

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_0 = 8$; $q = 2$

ហើយ $u_n = u_0 q^n = 2^{n+3}$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(3;n) = 2^{n+3} - 3$

ខ. គណនា $f(4;2009)$

គេមាន $f(4;n) = f(3;f(4;n-1) = 2^{f(4;n-1)+3} - 3$, $n \ge 1$ ២ពិន្ទុ

$f(4;0) = f(3;1) = 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $0+2$ ដង ១ពិន្ទុ

$f(4,1) = 2^{f(4;0)+3} - 3 = 2^{16} - 3 = 2^{2^{2^2}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $1+2$ ដង ១ពិន្ទុ

....

$f(4,n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $n+2$ ដង ២ពិន្ទុ

ដោយយក $n = 2009$ នោះ $f(4;2009) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $2009+2 = 2011$ ដង ២ពិន្ទុ

ល្អ សងណាំ

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០០៩
ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

68

អ៊ុំ សីវឌ្ឍី

01.04.2010

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណនាទៅប្រទេស

វិញ្ញាសាប្រឡងជ្រើសរើស គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងថ្នាក់ទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១០

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.២០១០

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I.(១៥ពិន្ទុ) ១. សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y ។

២. បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ។

II.(១៥ពិន្ទុ) រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$ ។

III.(១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\hat{X}=90^\circ$, $YZ=x, ZX=y$ និង $XY=z$ ។

បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n\geq 3$ ។

IV.(១៥ពិន្ទុ) គេបានបេះផ្លែស្វាយមករៀបគរជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា ហើយនៅសេសសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត ។

តែបើគេយកផ្លែស្វាយទាំងនោះមករៀបគរជា 17 គំនរស្មើៗគ្នាវិញ នោះពុំមានផ្លែស្វាយនៅសល់ទេ ។

រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ ។

V.(២០ពិន្ទុ) ចតុកោណប៉ោង ABCD មួយមានជ្រុង $AB=a; BC=b; CD=c; DA=d$ រង្វាស់មុំ $\widehat{ABC}=x$ និង $\widehat{ADC}=y$ ។

រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

VI.(២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតនៃចំនួន (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1; u_2=1$ និង $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ចំពោះ $n=3;4;\cdots$ ។

តាង $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n>a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 3$ ។

២. បង្ហាញថា $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

69

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០១-០៤-២០១០

2010 (I)

I. (១៥ពិន្ទុ) ១. សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណពីរកន្សោមពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y : ៥ពិន្ទុ

$$x^4+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-4x^2y^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$$

២. បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ គេមានពីរករណី : ៥ពិន្ទុ

1p - បើ $n=2k$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=16(k^4+16^{k-1})$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

1p - បើ $n=2k+1$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4(2^k)^4$ ៥ពិន្ទុ

$=(n^2+2^{2k+1}+n2^{k+1})(n^2+2^{2k+1}-n2^{k+1})$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0$, $x\neq 1$:

- ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ គេបាន $g\left(\frac{1}{1-x}\right)+g\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}$ ៥ពិន្ទុ

- ជំនួស x ដោយ $1-\frac{1}{x}$ គេបាន $g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$ ៥ពិន្ទុ

គេបាន $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ $\quad -g\left(\frac{1}{1-x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1-x}$ $\quad g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ គេបាន $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$ ចំពោះ $x\neq 0$, $x\neq 1$ ។ ៥ពិន្ទុ

III. (១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\hat{X}=90^\circ$, $YZ=x$, $ZX=y$ និង $XY=z$ ។

បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n\geq 3$

- ចំពោះ $n=3$ ៥ពិន្ទុ

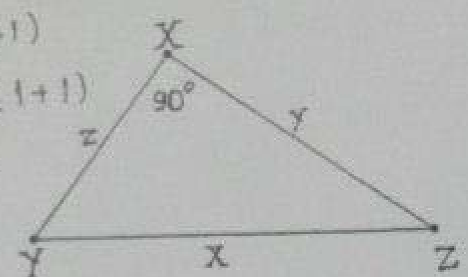
គេមាន $x^2=y^2+z^2\Rightarrow x^3=xy^2+xz^2$ (1+1)

តែ $x>y\Rightarrow xy^2>y^3$ ហើយ $x>z\Rightarrow xz^2>z^3$ (1+1)

គេទាញបាន $x^3=xy^2+xz^2>y^3+z^3$ 1 ៥ពិន្ទុ

- ឧបមាថា $x^k>y^k+z^k$ ចំពោះ $k\geq 3$ 5

- ពិនិត្យចំពោះ $k+1$



$x^k>y^k+z^k\Rightarrow x^{k+1}>xy^k+xz^k$ 2

តែ $x>y\Rightarrow xy^k>y^{k+1}$ ហើយ $x>z\Rightarrow xz^k>z^{k+1}$ 2 ៥ពិន្ទុ

គេទាញបាន $x^{k+1}>xy^k+xz^k>y^{k+1}+z^{k+1}$ 1

IV. (១៥ពិន្ទុ) រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ :

តាងជា M ចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលសោភាបានបេះ ។

- ដោយដឹងថា គេបានរៀបផ្លែស្វាយជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា និងនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែ នោះគេបាន : ៥ពិន្ទុ

$M\equiv 6\pmod{11}\Rightarrow M=11k+6, k>1$

70

- ដោយដឹងថា គេបានរៀបគរផ្លែស្វាយជា 17 គំនរស្មើៗគ្នា និងគ្មានសល់ផ្លែស្វាយ នោះគេបាន :

$$M \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow M = 11k + 6 \equiv 0 \pmod{17}$$
$$\Rightarrow 11k \equiv -6 \equiv 11 \pmod{17}$$ ៥ពិន្ទុ

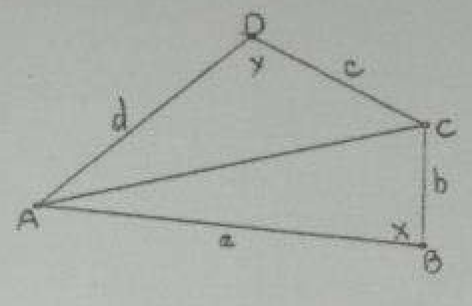
តែ $\gcd(11,17) = 1$ នោះ $k \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow k = 17m + 1, m \geq 1$

ដើម្បីបានចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ គេត្រូវតែយក $m = 1$ ជាការស្រេច : ៥ពិន្ទុ

$m = 1 \Rightarrow k = 18$ ហើយ $M = 11 \cdot 18 + 6 = 204$ ផ្លែ

V.(២០ពិន្ទុ) រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា

[illegible]
[illegible]



៥ពិន្ទុ

- រកផ្ទៃក្រឡានៃ ABCD ជាអនុគមន៍នៃ $a;b;c;d;x$ និង y

ចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}cd\sin y$ 3p

អង្កត់ទ្រូង $[AC]$ មានប្រវែង $L^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y$ 2p ៥ពិន្ទុ

ដោយធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x គេបាន :

$S'(x) = \frac{1}{2}ab\cos x + \frac{1}{2}cd\cos y \cdot y'$ (1) (2p)

$L'(x) = 2ab\sin x = 2cd\sin y \cdot y'$ (2p) ៥ពិន្ទុ

$ab\sin x = cd\sin y \cdot y' \quad \Rightarrow y' = \frac{ab\sin x}{cd\sin y}$ (1p)

$(1) \Rightarrow S'(x) = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\sin y} = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sin(x+y)}{\sin y}$ មានសញ្ញាដូចសញ្ញា $\sin(x+y)$ (1p)

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \pi$ (1p)

បើ $0 < x + y < \pi \Leftrightarrow S'(x) > 0$ (1p)

បើ $2\pi > x + y > \pi \Leftrightarrow S'(x) < 0$ (1p) ៥ពិន្ទុ

បានន័យថា $S(x)$ មានអតិបរមាលុះត្រាតែ $x + y = \pi$

ដូចនេះ ចតុកោណ ABCD មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាលុះត្រាតែ ABCD ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ (1p)

VI.(២០ពិន្ទុ) តាង $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

- ចំពោះ $n = 3$ គេបាន $u_3 = 2$ ហើយ $a^{3-2} = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ បានន័យថា $u_3 > a^{3-2}$ (3p)

- ឧបមាថា $u_p > a^{p-2}$ ចំពោះ $p \geq 3$ (2p) ៥ពិន្ទុ

71

- សិក្សាចំពោះ $p+1$

តាមសម្មតិកម្មអនុមានរួម គេបាន $u_p > a^{p-2}, u_{p-1} > a^{p-3}$ (2p)

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ គេបាន $u_p + u_{p-1} > a^{p-2} + a^{p-3}$ ហើយ $u_{p+1} > a^{p-2} + a^{p-3}$ (1) (1p)

តែគេដឹងថា $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះគេបាន $a^2 = a+1$ (1p)

ដោយគុណនឹង a^{p-3} គេបាន $a^{p-1} = a^{p-2} + a^{p-3}$ (2)

តាម $(1) \& (2) \Rightarrow u_{p+1} > a^{(p+1)-2}$ (1p) ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

២. បង្ហាញថា $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n :

- ចំពោះ $n=1$ គេបាន $1 = u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(a-b) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}) = 1$ (3p)

- ឧបមាថា $u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k)$ (2p) ៥ពិន្ទុ

- សិក្សាចំពោះ $k+1$

គេមាន $u_{k+1} = u_k + u_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((a^k + a^{k-1}) - (b^k + b^{k-1})\right)$ (3) (1p)

តែ $a \& b$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះ $a^2 = a+1$ និង $b^2 = b+1$ (2p)

គេបាន $a^{k+1} = a^k + a^{k-1}$ និង $b^{k+1} = b^k + b^{k-1}$ (2p)

តាម $(3) \Rightarrow u_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k+1} - b^{k+1})$ ៥ពិន្ទុ

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

វិ.ព្រះសីហនុ

ឈុន សេងលាភ

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

72

03.04.2010

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងថ្នាក់ទី ១២

សម័យប្រឡងៈ ០១-០៤-២០១០

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី២ ថ្ងៃទី ០៣-០៤-១០

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I.(១០ពិន្ទុ) សមីការ $ax^2+2010x+c=x$ គ្មានឫសទេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា សមីការ $a(ax^2+2010x+c)^2+2010(ax^2+2010x+c)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

II.(១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+1$ មានលេខមេគុណ $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេដឹងថាពហុធា $P(x)$ មាន n ឫសដែលសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា $P(2010)\ge\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ។

III.(១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំណុចនឹង A មួយដែលស្ថិតនៅផ្នែកក្នុងនៃមុំស្រួច $\angle xOy$ មួយ ។

រកចំណុច B និង C នៅលើជ្រុង $[Ox)$ និង $[Oy)$ រៀងគ្នា ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមា ។

IV.(២០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន r ដែលជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

១. បង្ហាញថា 2^r-1 ជាសំណល់ ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1 ។

២. គេតាង μ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។ បង្ហាញថា $2^\mu-1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ 2^a-1 និង 2^b-1 ។

V.(២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ែ (S) មួយមានកាំ R ហើយចារឹកក្នុងតេត្រាអែត $ABCD$ មួយ ។ ប្លង់បួនផ្សេងគ្នាប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ហើយ ស្របរៀងគ្នានឹងមុខទាំងបួននៃតេត្រាអែត កាត់តេត្រាអែតនោះបានជាតេត្រាអែតតូចៗចំនួនបួន ។ តេត្រាអែតតូចៗទាំងនោះចារឹកក្រៅស្វ៊ែតូចៗ ដែលមានកាំរៀងគ្នា r_1, r_2, r_3 និង r_4 ។

បង្ហាញថា $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$ ។

VI.(២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f មួយកំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមៈ

(i) f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$

(ii) $f(x)>-\frac{1}{x}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

(iii) $f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

១. គណនា $f(1)$ ។

២. គណនា $f(x)$ ។

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ 2010 (II)

សម្រាប់ថ្ងៃទី ០៣-០៤-១០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា សមីការ $a(ax^2+2010x+c)^2+2010(ax^2+2010x+c)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ :

(2p) តាង $t(x)=ax^2+2010x+c$

(3p) ដោយសមីការ $t(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះ ឬមួយ $t(x)<x$ ឬមួយ $t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ៥ពិន្ទុ

(3p) គេទាញបាន ឬមួយ $t(t(x))<t(x)<x$ ឬមួយ $t(t(x))>t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ មានន័យថា :

- ឬមួយ $a(ax^2+2010x+c)^2+2010(ax^2+2010x+c)+c<x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

- ឬមួយ $a(ax^2+2010x+c)^2+2010(ax^2+2010x+c)+c>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ៥ពិន្ទុ

(2p) ដូចនេះ សមីការ $a(ax^2+2010x+c)^2+2010(ax^2+2010x+c)+c=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $P(2010)\ge(2\sqrt{2010})^n$:

(2p) ដោយលេខមេគុណ $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន នោះ ឫស $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតមិនវិជ្ជមាន ។ ៥ពិន្ទុ

(3p) តាង $\alpha_i=-x_i, i=1,2,\dots,n$ នោះគេបាន $\alpha_i\ge0$ ហើយ $P(x)=(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$

(2p) $P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\dots(2010+\alpha_n)$ ៥ពិន្ទុ

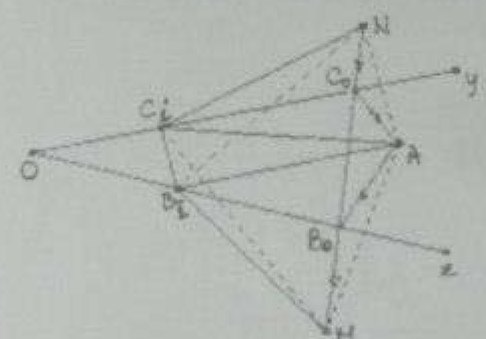
(3p) ម្យ៉ាងទៀត $2010+\alpha_i\ge2\sqrt{2010\cdot\alpha_i}, i=1,2,\dots,n$

(3p) គេបាន $P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\dots(2010+\alpha_n)\ge2^n\sqrt{2010^n\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n}$ ៥ពិន្ទុ

(2p) ដូចនេះ $P(2010)\ge(2\sqrt{2010})^n$ ព្រោះ $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=1$

III. (១៥ពិន្ទុ) រកចំណុច B និង C នៅលើជ្រុង [Ox] និង [Oy] រៀងគ្នា ដើម្បីឱ្យត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមា :

(5P) →



(3P) ៥ពិន្ទុ

(2p) តាង M & N ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ធៀបនឹង [Ox] និង [Oy] រៀងគ្នា ។

តាង B_0 & C_0 ជាចំណុចប្រសព្វ រវាង [MN] ជាមួយ [Ox] និង [Oy] រៀងគ្នា ។

យក $B_i\in[Ox], C_i\in[Oy], i=1,2,\dots$

(3p) - គេបានបរិមាត្រនៃ ΔAB_0C_0 : $p_0=AB_0+B_0C_0+C_0A=MB_0+B_0C_0+C_0N=MN$; ហើយ ៥ពិន្ទុ

(2p) - គេបានបរិមាត្រនៃ ΔAB_iC_i : $p_i=AB_i+B_iC_i+C_iA=MB_i+B_iC_i+C_iN$

តែ $MB_i+B_iC_i>MC_i \Rightarrow MB_i+B_iC_i+C_iN>MC_i+C_iN>MN$ ចំពោះគ្រប់ $i=1,2,\dots$

គេបាន $p_i>p_0, \forall i=1,2,\dots$ ៥ពិន្ទុ

(3p) ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រអប្បបរមាកាលណា $B=B_0, C=C_0$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ១. បង្ហាញថា 2^r-1 ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1 :

(2p) តាមវិធីចែកអឺគ្លីត $a=bq+r, 0<r<b$ គេបាន :

(3p) $2^a-1=2^{bq+r}-2^r+2^r-1=2^r(2^b-1)((2^b)^{q-1}+\cdots+2^b+1)+(2^r-1)$

(2+1)p $=(2^b-1)(2^{b(q-1)+r}+\cdots+2^{b+r}+2^r)+(2^r-1), 0<2^r-1<2^b-1$

(2p) ដូចនេះ 2^r-1 ជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1 ។

២. បង្ហាញថា $2^{\mu}-1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ (2^a-1) និង (2^b-1) :

តាង $r_0=a, r_1=b$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ :

(2p) $r_0=r_1q_1+r_2\ (0<r_2<r_1), r_1=r_2q_2+r_3\ (0\le r_3<r_2), \ldots, r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-2}+r_{n-1}\ (0\le r_{n-1}<r_{n-2}),$

$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}$

(3p) គេបាន $\gcd(a,b)=r_{n-1}=\mu$

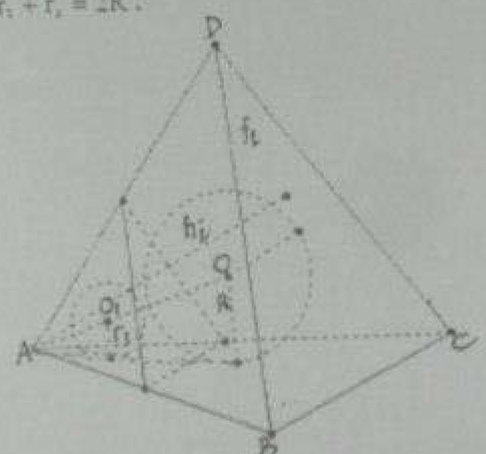
តាង $R_0=2^a-1, R_1=2^b-1$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ និងលទ្ធផលខាងលើ :

(3p)
$$\begin{cases} R_0=R_1Q_1+R_2, R_2=2^{r_2}-1 \\ R_1=R_2Q_2+R_3, R_3=2^{r_3}-1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{n-3}=R_{n-2}Q_{n-2}+R_{n-1}, R_{n-1}=2^{r_{n-1}}-1 \\ R_{n-2}=R_{n-1}Q_{n-1} \end{cases}$$

(2p) គេបាន $\gcd(R_0,R_1)=R_{n-1}=2^{\mu}-1$

VI. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$:

(5p) →



តាង f_i & h_i, $i=1,2,3,4$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃមុខ និងកម្ពស់ដែលត្រូវគ្នានៃតេត្រាអែត ។

តាង $r_i, i=1,2,3,4$ ជាកាំស្វ៊ែចារឹកក្នុងតេត្រាអែតតូចៗទាំងបួន ។

(2p) ដោយប្លង់មុខកាត់ស្របមុខនៃតេត្រាអែត នោះតេត្រាអែតតូចៗដែលបានទាំងបួន ដូចនឹងតេត្រាអែតដើម ។

(3p) គេបាន $R/r_i=(h_i-2R)/h_i=1-(2R/h_i)\Rightarrow(2R/h_i)=1-(r_i/R)=(R-r_i)/R$

ហើយ $2R/h_i=(R-r_i)/R\Rightarrow 1/h_i=(R-r_i)/2R^2, i=1,2,3,4$

(3p) ចំពោះ $i=1,2,3,4$ គេបាន $1/h_1+1/h_2+1/h_3+1/h_4=(4R-r_1-r_2-r_3-r_4)/2R^2$ (1)

(2p) ម្យ៉ាងទៀតគេមានមាឌនៃតេត្រាអែត $V=(1/3)R(f_1+f_2+f_3+f_4)\Rightarrow f_1+f_2+f_3+f_4=3V/R$

$V=(1/3)f_1h_1=(1/3)f_2h_2=(1/3)f_3h_3=(1/3)f_4h_4$

(2p) $1/h_1=f_1/3V, 1/h_2=f_2/3V, 1/h_3=f_3/3V, 1/h_4=f_4/3V$

75

(2p) គេបាន $1/h_1+1/h_2+1/h_3+1/h_4=(f_1+f_2+f_3+f_4)/3V=(3V/R):3V=1/R$ (2)

តាម (1) & (2) $\Rightarrow (4R-r_1-r_2-r_3-r_4)/2R^2=1/R$ ហើយ $4R-r_1-r_2-r_3-r_4=2R$ ៥ពិន្ទុ

(2p) ដូចនេះ $r_1+r_2+r_3+r_4=2R$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) ក. គណនា $f(1)$

តាង $t=f(1)$

(2p) - យក $x=1\Rightarrow f(1)\cdot f(f(1)+1)=1$ ហើយ $t\cdot f(t+1)=1\Rightarrow f(t+1)=1/t$

(2p) - យក $x=t+1\Rightarrow f(t+1)f(f(t+1)+1/(t+1))=1$ ហើយ $(1/t)f((1/t)+(1/(t+1))=1$

(3p) គេបាន $f((1/t)+(1/(t+1))=t=f(1)$ ៥ពិន្ទុ

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន $1/t+1/(1+t)=1$ សមមូល $t^2-t-1=0$

(2p) មានឬស $t=(1\pm\sqrt{5})/2$

(1p) - ចំពោះ $t=(1+\sqrt{5})/2$ គេបាន $1<t=f(1)<f(1+t)=1/t<1$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

(1p) - ចំពោះ $t=(1-\sqrt{5})/2$ គេបាន $t=f(1)>-1/1$ ពិតចំពោះ (ii) ៥ពិន្ទុ

(1p) ដូចនេះ $f(1)=(1-\sqrt{5})/2$

ខ. គណនា $f(x)$

(1p) តាង $\alpha=f(x)\Rightarrow \alpha\cdot f(\alpha+1/x)=1\Rightarrow f(\alpha+1/x)=1/\alpha$

(1p) - យក $x=\alpha+1/x\Rightarrow f(\alpha-1/x)\cdot f(f(\alpha-1/x)+1/(\alpha-1/x))=1$

(1p) គេទាញបាន $f(f(\alpha+1/x)+x/(\alpha x+1)=\alpha=f(x)$

(1p) ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0;+\infty[$ នោះគេបាន $f(\alpha+1/x)+x/(\alpha x+1)=x$

$1/\alpha+x/(\alpha x+1)=x\Leftrightarrow x^2\alpha^2-x\alpha-1=0$ ៥ពិន្ទុ

(1p) $\alpha=(1\pm\sqrt{5})/2x$

(1p) - ចំពោះ $\alpha=(1+\sqrt{5})/2x\Rightarrow f'(x)=-(1+\sqrt{5})/2x^2<0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះ ដែលផ្ទុយពីលក្ខណៈ (i)

(1p) - ចំពោះ $\alpha=(1-\sqrt{5})/2x\Rightarrow f'(x)=-(1-\sqrt{5})/2x^2>0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (i)

(1p) ម្យ៉ាងទៀត $(1-\sqrt{5})/2>-1\Rightarrow f(x)=(1-\sqrt{5})/2x>-1/x$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (ii) ។

ដោយ $f(x)=t/x$ នោះគេបាន :

(1p) $f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=(t/x)f((t/x)+(1/x))=(t/x)(tx/t+1)=t^2/(t+1)=1$ ៥ពិន្ទុ

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ (iii) ។

(1p) ដូចនេះ $f(x)=t/x$ ដែល $t=(1-\sqrt{5})/2$ ។

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

76

អ៊ុំ សំរិទ្ធ

01.04.2011

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង : ០១ មេសា ២០១១
វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី១ : ០១.៤.២០១១
រយៈពេល: ១៨០ នាទី ពិន្ទុ: ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) នៅដើមឆ្នាំ ២០១១ នេះ ចំនួនទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តស្មើនឹង $pq(p^2-q^2)$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $p>q$ ។ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដោយមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ។ បង្ហាញថា លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

II. (១០ពិន្ទុ) ចំណុច $M_i(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ។

III. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។
បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ។

១. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

២. ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ គណនាតម្លៃ $f(2011)$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$ និងបរិមាត្រ $2p$ ហើយចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ។
បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

១. បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

២. ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។

77

2011 (I)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១១

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.២០១១

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I.-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា លេខរៀងនៃខេសចុងក្រោយគេបង្កើតជាពហុគុណនៃ3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p>q$:

គេត្រូវបង្ហាញថា $A=pq(p^2-q^2)$ ជាពហុគុណនៃ3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p, q, p>q$ ។

គេមាន $A=pq(p^2-q^2)=pq(p-q)(p+q)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p, q គេអាចមានករណី :

$p=3a$ ឬ $p=3a+1$ ឬ $p=3a+2$ ដែល a ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$q=3b$ ឬ $q=3b+1$ ឬ $q=3b+2$ ដែល b ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

គេសិក្សាករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម :

-បើ $p=3a \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 ពិន្ទុ

-បើ $p=3a+1$ 1 ពិន្ទុ

.បើ $q=3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 ពិន្ទុ

.បើ $q=3b+1 \Rightarrow p-q=3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 P

.បើ $q=3b+2 \Rightarrow p+q=3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 P

-បើ $p=3a+2$ 1 P

.បើ $q=3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 P

.បើ $q=3b+1 \Rightarrow p+q=3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 P

.បើ $q=3b+2 \Rightarrow p-q=3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ3 1 P

ដូចនេះ លេខរៀងនៃខេសចុងក្រោយគេបង្កើតជាពហុគុណនៃ3 ។ 1 P

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាមានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ :

ដើម្បីបំបាត់ x^3 និង z^3 ពីអង្គទី២ គេអាចយក $z=-x$ ។ 2P

នោះគេបាន $2x^2+y^2=y^3 \Leftrightarrow 2x^2=(y-1)y^2$ 1P

$\Leftrightarrow x^2=\frac{y-1}{2}\cdot y^2$ 1P

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\frac{y-1}{2}$ ជាការេប្រាកដ គឺថា $\frac{y-1}{2}=k^2, k\in Z \Rightarrow y=2k^2+1$ 2P

គេបាន $2x^2=(2k^2+1-1)(2k^2+1)^2$ ឬ $x^2=k^2(2k^2+1)^2$ 1P

ហើយ $x=\pm k(2k^2+1), y=2k^2+1, z=\pm k(2k^2+1)$ ដែល $k\in Z$ ។ 2P

ដូចនេះ មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។ 1P

III-(២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}, n\ge 2$ ។

បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$

បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ដំបូងគេត្រូវបង្ហាញថា $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in N$

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $u_2u_3-u_1u_4=1\cdot 2-1\cdot 3=(-1)^1$: សមភាពពិត 3p

-ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=p$ គឺថា $u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3}=(-1)^p$ 3p

-សិក្សា ចំពោះ $n=p+1$

$$u_{p+1+1}u_{p+1+2}-u_{p+1}u_{p+1+3}=u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}$$

$$u_{p+2}u_{p+3}-u_{p+1}u_{p+4}=u_{p+2}(u_{p+2}+u_{p+1})-u_{p+1}(u_{p+3}+u_{p+2})$$ 2p

$$=(u_{p+2})^2+u_{p+2}u_{p+1}-u_{p+1}(u_{p+2}+u_{p+1}+u_{p+2})=(u_{p+2})^2-(u_{p+1})^2-(u_{p+1}u_{p+2})$$ 2p

$$=(u_{p+2}-u_{p+1})(u_{p+2}+u_{p+1})-(u_{p+1}u_{p+2})$$

$$=(u_p+u_{p+1}-u_{p+1})(u_{p+3})-(u_{p+1}u_{p+2})=u_pu_{p+3}-u_{p+1}u_{p+2}$$ 2p

$$=(-1)(u_{p+1}u_{p+2}-u_pu_{p+3})=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$$ 2p

បញ្ជាក់ថាសមភាពពិតចំពោះ $n=p+1$ ។

ដូចនេះ $u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}=(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in N$ ។ 2p

- បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ 2p

ដោយយក $n=2010$ នោះគេបាន $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=(-1)^{2010}=1$

- បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ដោយយក $n=1042011$ នោះគេបាន $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=(-1)^{1042011}=-1$ 2p

IV.(២០ពិន្ទុ) ១-កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ៨ពិន្ទុ

គេមាន $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^{k-1}x\sin x\,dx=\left[-\cos x\sin^{k-1}x\right]_0^{\pi/2}+(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x\cos^2 x\,dx$ 2p

$I_k=(k-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}x(1-\sin^2 x)dx=(k-1)I_{k-2}-(k-1)I_k$ 2p

$\Rightarrow kI_k=(k-1)I_{k-2}$ 2p

$\Rightarrow (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_{k+2-2}\ \Rightarrow (k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k$ 2p

២- ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ១២ពិន្ទុ

គេមាន

$f(k+1)=(k+1+1)I_{k+1}I_{k+1+1}$

$f(k+1)=(k+2)I_{k+1}I_{k+2}$ (1) 2p

3. ព្រះសីហនុ

តែ $(k+2)I_{k+2}=(k+1)I_k\Rightarrow I_{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}I_k$ 2p

តាម(1) គេបាន $f(k+1)=(k+2)I_{k+1}\dfrac{k+1}{k+2}I_k$

$f(k+1)=(k+1)I_{k+1}I_k$ 1p

ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ហើយ $f(k+1)=(k+1)I_kI_{k+1}$ 1p

នោះគេទាញបាន $f(k+1)=f(k)$,$\forall k\in N$

គណនាតម្លៃ $f(2011)$:

ដោយ $f(k+1)=f(k)$,$\forall k\in N$ នោះគេអាចសរសេរ :

79

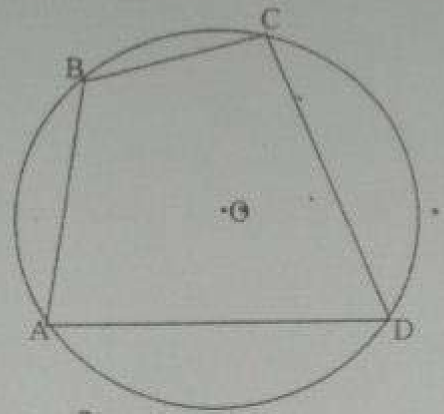
$f(k) = f(k-1) = f(k-2) = \cdots = f(2) = f(1) = (1+1)I_1 I_2 = 2I_1 I_2 \quad (2)$ 2p

តែ $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$ 1p

$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = (1/2)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx = (1/2)[x-(1/2)\sin 2x]_0^{\pi/2} = \pi/4$ 1p

តាម(2) គេបាន $f(k) = \pi/2 \Rightarrow f(2011) = \pi/2$ ។ 2p

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



2p

តាមទ្រឹស្តីបទ កូស៊ីនុសក្នុង ΔABC និង ΔACD : 2p

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$ ព្រោះ $B + D = \pi \Rightarrow \cos D = -\cos B$

$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 + 2cd\cos B$ 2p

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab+cd)}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$S(ABCD) = S(ABC) + S(ACD)$ 2p

$= (1/2)ab\sin B + (1/2)cd\sin D$

$S(ABCD) = (1/2)ab\sin B + (1/2)cd\sin B$ ព្រោះ $B + D = \pi \Rightarrow \sin D = \sin B$ 1p

$S(ABCD) = (1/2)(ab+cd)\sin B$ 1p

$S(ABCD) = (1/2)(ab+cd)\sqrt{1-\cos^2 B} \quad (1)$ 1p

តែគេមាន :

$$1-\cos^2 B = \left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$ 2p

$$= \left(\frac{2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(\frac{2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)}\right)$$ 2p

$$= \left(\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}\right)\left(\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2(ab+cd)}\right)$$ 1p

$$= \left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$ 1p

$$= \left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)(c+d+a+b-2b)(c+d-2a+a+b)$$ 1p

ដោយតាង $2p = a+b+c+d$ នោះគេបាន :

ដោយតាង $2p = a+b+c+d$ នោះគេបាន :

80

$1-\cos^2 B=\left(\frac{1}{4(ab+cd)^2}\right)(2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)$

$1-\cos^2 B=\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$ 1P

តាម (1) គេបាន :

$S(ABCD)=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{\left(\frac{4}{(ab+cd)^2}\right)(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

ដូចនេះ $S(ABCD)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ដែល $p=(a+b+c+d)/2$ ។ 2P .

VI- (២០ពិន្ទុ) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}+P'_{n-1}$

១-បង្ហាញថា $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ៥ពិន្ទុ

-ចំពោះ $n=1$ គេបាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}P_1(x)$ 2P

-ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n=k$ គឺថា $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ (1) 2P

-សិក្សាចំពោះ $n=k+1$: ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (1) : 4P

$y^{(k+1)}=e^{-x^2}\left(-2xP_k(x)+P'_k(x)\right)=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$

២-ចូរបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ១៥ពិន្ទុ .

គេមាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xy\Rightarrow y'+2xy=0$ (2) 2P

ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (2) ចំនួន n ដង និង ប្រើរូបមន្ត Leibniz :

$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C(n,1)f^{(n-1)}g'+\cdots+C(n,p)f^{(n-p)}g^{(p)}+\cdots+fg^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C(n,i)f^{(n-i)}g^{(i)}$

គេបាន $y^{(n+1)}+2(xy)^{(n)}=y^{(n+1)}+2xy^{(n)}+2ny^{(n-1)}=0$ 2P

ឬ $e^{-x^2}(P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x))=0\Rightarrow \boxed{P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0}$ (3) 2P

តែគេមាន : $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)$

តាម(3) គេបាន $-2xP_n(x)+P'_n(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0\Rightarrow P'_n(x)=-2nP_{n-1}(x)$ 2P

$\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2(n+1)P_n(x)=-2nP_n(x)-2P_n(x)$ (4)

ដោយ $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2xP'_n(x)-2P_n(x)+P''_n(x)$ (5) 2P

តាម (4) និង(5) គេបាន $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ 2P

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១១

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុ សាវឌី

chhun Sengnam

81

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែកម្រិតប្រទេស

វិញ្ញាសាអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង : ០១ មេសា ២០១១

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី២ : ០៣-៤-២០១១

រយៈពេល: ១៨០ នាទី ពិន្ទុ: ១០០

03. 04. 2011

I. (១០ពិន្ទុ) គេបានប្រើប្រាស់ទ្រុងចំនួន 99 គ្រឿងសម្រាប់ដឹកជញ្ជូនកូនមាន់ចំនួន $\overline{7y38x5}$ ក្បាល ទៅកាន់កសិដ្ឋានមួយ។ រកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ដោយដឹងថាក្នុងទ្រុងនីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា។

II. (១០ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប α,β,λ និង μ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\alpha\mu=1+\beta\lambda$។ គេយក x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a+\beta b$ និង $\lambda a+\mu b$។ ចូរប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ដែលមានលេខមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។ គេដឹងថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x_0 ដែល $f(x_0)=p$ ជាចំនួនបឋម។
បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។

IV. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1, x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$។
ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n=|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n\geq 3$។
ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n-9=4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះ $n\geq 3$។
១- បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n\geq 3$។ ទាញរកតម្លៃនៃតួ $y_{3042011}$។
២- បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ។

V. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ a និង X ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a>1, X>0$។ k ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន និង c_j ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0\leq c_j<a$ ចំពោះ $j=0,1,\ldots,k$។
បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង $X=\sum_{j=0}^{k}c_ja^j$។

VI. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$។ ត្រីកោណ ABC នេះចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតដែលមានផ្ចិត I និងកាំ r។
បង្ហាញថា $4R+r=p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$។

2011 (II)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែកម្រិតប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០៦.០៤.២០១០

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១១

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) រកលេខ x និង y ដោយដឹងថាក្នុងទ្រុងនីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា :

គេត្រូវរកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ដើម្បីឱ្យចំនួន $7y38x5$ ចែកដាច់នឹង 99 ។

គេមាន $\gcd(9,11)=1$

ដើម្បីឱ្យ $7y38x5$ ចែកដាច់នឹង $99=9\times 11$ លុះត្រាតែ

$7+y+3+8+x+5\equiv 0 \pmod 9$ និង $5+8+y-x-3-7\equiv 0 \pmod{11}$ ២ ពិន្ទុ

$\Leftrightarrow (x+y\equiv 4 \pmod 9)\wedge(-x+y\equiv -3 \pmod{11})$ ២ ពិន្ទុ

$\Leftrightarrow (x+y=9m+4)\wedge(-x+y=11n-3)$

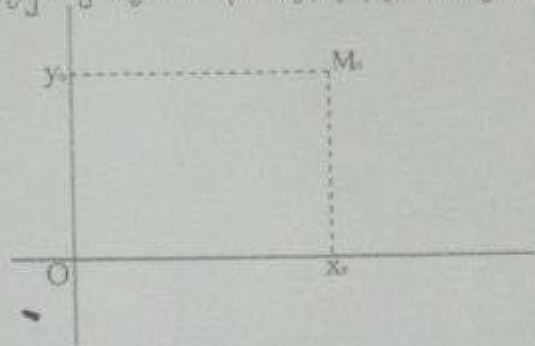
ដោយ $0\le x,y\le 9)\Rightarrow 0\le x+y\le 18,\ -9\le -x+y\le 9$ នោះគេទាញបាន : ២ ពិន្ទុ

$(x+y=4)\wedge(-x+y=-3),(x+y=4)\wedge(-x+y=8),$ ២ ពិន្ទុ

$(x+y=13)\wedge(-x+y=-3),(x+y=13)\wedge(-x+y=8)$

ដូចនេះ $x=8, y=5$ ២ ពិន្ទុ

II-(១០ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ :



ដោយ x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $a \,\&\, b$ ហើយ y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $A=\alpha a+\beta b \,\&\, B=\lambda a+\mu b$

នោះគេបាន :$(x_0|a \wedge x_0|b)\Rightarrow x_0|(\alpha a+\beta b)=A$ និង $(x_0|a\wedge x_0|b)\Rightarrow x_0|(\lambda a+\mu b)=B$

ដូចនេះ $x_0|y_0$ (1) ២ ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $y_0|A=\alpha a+\beta b\Rightarrow y_0|(\alpha\mu a+\beta\mu b)$

$y_0|B=\lambda a+\mu b\Rightarrow y_0|(\beta\lambda a+\beta\mu b)$

គេបាន $y_0|(\alpha\mu-\beta\lambda)a=a$ ព្រោះ $\alpha\mu-\beta\lambda=1$ ២ ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា : $y_0|A=\alpha a+\beta b\Rightarrow y_0|(\alpha\lambda a+\beta\lambda b)$

$y_0|B=\lambda a+\mu b\Rightarrow y_0|(\alpha\lambda a+\alpha\mu b)$

គេបាន $y_0|(\alpha\mu-\beta\lambda)b=b$ ព្រោះ $\alpha\mu-\beta\lambda=1$

83

ដោយ $(y_0|a\wedge y_0|b)\Rightarrow y_0|x_0$ (2) ២ ពិន្ទុ

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow x_0 = y_0$ ២ ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ មានចម្ងាយស្មើពីអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ។ ២ ពិន្ទុ

III-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម:

គេមាន $f(x_0) = a_n x_0^{\,n} + a_{n-1}x_0^{\,n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p$ ៣ ពិន្ទុ

គេពិនិត្យ $f(x_0 + kp), k \in Z$

$f(x_0+kp) = a_n(x_0+kp)^n + a_{n-1}(x_0+kp)^{n-1} + \cdots + a_1(x_0+kp) + a_0$ ៣ ពិន្ទុ

$= (a_n x_0^{\,n} + a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i)x_0^{\,n-i}(kp)^i) + (a_{n-1}x_0^{\,n-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{\,n-1-i}(kp)^i) + \cdots +$ ៣ ពិន្ទុ

$+ (a_1 x_0 + a_1 kp) + a_0$ ៣ ពិន្ទុ

$= (a_n x_0^{\,n} + a_{n-1}x_0^{\,n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0) + (a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i)x_0^{\,n-i}(kp)^i + + \cdots + a_1 kp)$

$= p + p(a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,i)x_0^{\,n-i}k^i p^{i-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{\,n-1-i}k^i p^{i-1} + \cdots + a_1 k)$ ៣ ពិន្ទុ

$f(x_0+kp) = p(1 + a_n \sum_{i=1}^{n} C(n,1)x_0^{\,n-i}k^i p^{i-1} + a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} C(n-1,i)x_0^{\,n-1-i}k^i p^{i-1} + \cdots + a_1 k)$

៣ ពិន្ទុ

គេទាញបាន $p \mid f(x_0 + kp), k \in Z$

ដូចនេះ មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\beta = x_0 + kp, k \in Z$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $f(\beta)$ មិនមែន ជាចំនួនបឋម ។ ២ ពិន្ទុ

IV-(២០ពិន្ទុ)

១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$

$= |(x_{n+3} + x_{n+2})x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_n)|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2})| = |x_{n+3}x_{n-2} - x_{n+2}x_{n-1}|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}(x_{n-1} - x_{n-3}) - x_{n+2}x_{n-1}| = |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+3})|$

២ ពិន្ទុ

(ព្រោះ $x_{n-1} = x_{n-2} + x_{n-3} \Rightarrow x_{n-2} = x_{n-1} - x_{n-3}$)

$= |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+2} - x_{n+1})|$ ២ ពិន្ទុ

$= |x_{n+3}x_{n-3} - x_{n+1}x_{n-1}|$

$y_n = |x_{(n-1)+4}x_{(n-1)-2} - x_{(n-1)+2}x_{(n-1)}| = y_{n-1}, \forall n \geq 3$

៣ ពិន្ទុ

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។

- ទាញរកតម្លៃ $y_{3042011}$

$y_n = y_{n-1}, \forall n \geq 3 \Rightarrow y_{3042011} = y_{3042010} = \cdots = y_4 = y_3 = |x_7 x_1 - x_5 x_3| = |13 \cdot 1 - 5 \cdot 2| = 3$ ៣ ពិន្ទុ

២-បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ :

គេមាន $y_n = y_{n-1} = \cdots = y_{3042011} = 3$ ហើយគេបាន :

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n = \pm 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} = x_{n+2}x_n \pm 3$ ៣ ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $z_n - 9 = 4x_n x_{n+2}(x_n x_{n+2} \pm 3) \Rightarrow z_n = (\pm 3)^2 + 2(\pm 3)(2x_n x_{n+2}) + (2x_n x_{n+2})^2$

$z_n = (\pm 3 + 2x_n x_{n+2})^2$ ជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។ ៣ ពិន្ទុ

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$

84

-តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់គេបាន : $X = aq_0 + c_0 , 0 \le c_0 < a$

$q_0 = aq_1 + c_1 , 0 \le c_1 < a$ ២ ពិន្ទុ

$q_1 = aq_2 + c_2 , 0 \le c_2 < a$

....

$q_{k-1} = a \times 0 + c_k , 0 \le c_k < a$ ២ពិន្ទុ

គេបានស្វ៊ីតនៃផលចែក : $X > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{k-1} > q_k = 0$ ហើយគេបាន :

$X = aq_0 + c_0$

$= a(aq_1 + c_1) + c_0 = a^2 q_1 + ac_1 + c_0$ ២ ពិន្ទុ

$= a^3 q_2 + c_2 a^2 + c_1 a + c_0$

....

$= a^k q_{k-1} + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0$ ២ ពិន្ទុ

$= c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0 , (q_{k-1} = c_k)$ ដែល $0 \le c_j < a, j = 0, 1, \ldots, k$

ដូចនេះ $X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ ២ ពិន្ទុ

-បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានមួយបែបគត់

ឧបមាថា X អាចសរសេរបានពីរបែប :

$X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0 , 0 \le c_j < a$ ២ ពិន្ទុ

$X = c'_k a^k + c'_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c'_1 a + c'_0 , 0 \le c'_j < a$

គេបាន $(c_k - c'_k)a^k + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1} + \cdots + (c_1 - c'_1)a + (c_0 - c'_0) = 0$ ២ ពិន្ទុ

បើ X អាចសរសេរបានពីរបែបនោះគេអាចរកបានចំនួនគត់ j ដែលតូចជាងគេ ហើយ $c_j \ne c'_j$ ហើយគេបាន :

$(c_k - c'_k)a^k + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a^{j+1} + (c_j - c'_j)a^j = 0$

$\Rightarrow a^j((c_k - c'_k)a^{k-j} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a^1 + (c_j - c'_j)) = 0$ ២ ពិន្ទុ

$\Rightarrow (c_k - c'_k)a^{k-j} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1})a = c'_j - c_j$

$\Rightarrow ((c_k - c'_k)a^{k-j-1} + (c_{k-1} - c'_{k-1})a^{k-1-j-1} + \cdots + (c_{j+1} - c'_{j+1}))a = c'_j - c_j$

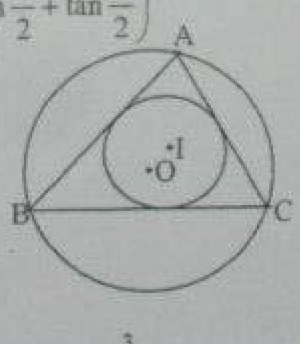
$\Rightarrow a|(c'_j - c_j)$ ២ ពិន្ទុ

តែ $(0 \le c_j < a) \wedge (0 \le c'_j < a) \Rightarrow (-a < c'_j - c_j < a)$

នេះបញ្ជាក់ថា $a|(c'_j - c_j)$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

ដូចនេះ គេអាចសរសេរ $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ បានមួយបែបគត់ ។ ២ ពិន្ទុ

VI-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $4R + r = p\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$



២ ពិន្ទុ

85

តាមរូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន :

$$r=(p-a)\tan(A/2)=(p-b)\tan(B/2)=(p-c)\tan(C/2)$$ ២ ពិន្ទុ

$$\Rightarrow r/(p-a)=\tan(A/2), r/(p-b)=\tan(B/2), r/(p-c)=\tan(C/2)$$

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=r/(p-a)+r/(p-b)+r/(p-c)$$

$$=\frac{r\left(3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (i)$$ ២ ពិន្ទុ

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$$

$$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$$

គេបាន $(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2 \quad (ii)$ ២ ពិន្ទុ

តាម (i):

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{pr^2}$$

$$=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{pr} \quad (iii)$$ ២ ពិន្ទុ

តាមរូបមន្តផ្សេងទៀតនៃផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC :

$$S=(abc)/4R=pr$$

$$\Rightarrow 4Rpr=4RS=abc$$ ២ ពិន្ទុ

តាម (ii) :

$$abc+(p-a)(p-b)(p-c)=4Rpr+pr^2$$ ២ពិន្ទុ

$$abc+(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr(4R+r)$$

$$p(p^2-(a+b+c)p+ab+bc+ca)=pr(4R+r)$$

$$p^2-2p^2+ab+bc+ca=r(4R+r)$$

$$-p^2+ab+bc+ca=r(4R+r)$$ ២ ពិន្ទុ

តាម (iii) :

$$\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{r(4R+r)}{pr}=\frac{4R+r}{p}$$ ២ ពិន្ទុ

$$\Rightarrow p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=4R+r$$

ដូចនេះ $4R+r=p\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$ ២ ពិន្ទុ

ឈុយ សាងណាំ

CS.N

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១១

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុំ ស៊ាវលី

2012

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

វិញ្ញាសាអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០២-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S_{2012}=\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cdots+\cos 2012a$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

III. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a)=\dfrac{a^2-\sqrt{a^4+4}+2}{a}$ ដែល $a>0$ ។
រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ ។

V. (១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ហើយ
$s(x)=-x^2+5$ ជាពហុធាមួយទៀត ។
គណនាផលគុណ $p=s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយខុសពី 1 ។
គណនាផលបូក $S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})$ ។

VII. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ហើយ $\angle ACB, \angle ABC$ ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $\angle ACB-\angle ABC\geq\frac{\pi}{6}$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃកំពូល A ទៅលើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ ។
បង្ហាញថា $\angle BAC+\angle COH<\frac{\pi}{2}$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២
សម័យប្រឡង: ០២.០៩.២០១២
អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០២.០៩.២០១២
រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

2012 (I)

I-(១០ពិន្ទុ) គណនា $S_{2012} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos 2012a$

- បើ $a = k2\pi, k \in Z$ នោះ $\cos a = \cos 2a = \cdots = \cos 2012a = 1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $S_{2012} = 2012$

- បើ $a \neq k2\pi, k \in Z \Rightarrow \sin\frac{a}{2} \neq 0$ គេអាចសរសេរ ២ពិន្ទុ

$$2\sin\frac{a}{2}S_{2012} = 2\sin\frac{a}{2}\cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos 2a + 2\sin\frac{a}{2}\cos 3a + \cdots + 2\sin\frac{a}{2}\cos 2012a$$ ២ពិន្ទុ

$$= (-\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{3a}{2}) + (-\sin\frac{3a}{2} + \sin\frac{5a}{2}) + \cdots + (-\sin\frac{4023a}{2} + \sin\frac{4025a}{2})$$

$$= \sin\frac{4025a}{2} - \sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow S_{2012} = \frac{\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \frac{\sin 1006a\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}, a \neq k2\pi$$ ២ពិន្ទុ

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A = 6^{2012} + 13^{2012} - 2^{2012} - 17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44

គេមាន $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + y^{n-1}) = (x-y)z$ ចែកដាច់នឹង $x-y$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $(6^{2012} - 2^{2012}) + (13^{2012} - 17^{2012}) = 4k - 4l$ ចែកដាច់នឹង 4 ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ $(6^{2012} - 17^{2012}) + (13^{2012} - 2^{2012}) = -11m + 11n$ ចែកដាច់នឹង 11 ២ពិន្ទុ

ដោយ $A \equiv 0 \pmod 4, A \equiv 0 \pmod{11}, GCD(4,11) = 1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $6^{2012} + 13^{2012} - 2^{2012} - 17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។ ២ពិន្ទុ

III-(១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2$

សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2} + \frac{1-\cos 4x^2}{2} = \frac{1-\cos 6x^2}{2} + \frac{1-\cos 8x^2}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$\Leftrightarrow \cos 2x^2 + \cos 4x^2 = \cos 6x^2 + \cos 8x^2$

$\Leftrightarrow \cos 3x^2\cos x^2 = \cos 7x^2\cos x^2$

$\Leftrightarrow \cos x^2(\cos 7x^2 - \cos 3x^2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2 = 0 \quad (E)$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន

88

$\cos x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2,...$ ២ពិន្ទុ

$\sin 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = l\dfrac{\pi}{2}, l = 0,1,2,\ldots \quad \sin 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x_3^2 = m\dfrac{\pi}{5}, m = 0,1,2,\ldots$ ២ពិន្ទុ

- បើ $l = 2n+1 \Rightarrow x_2^2 = (2n+1)\dfrac{\pi}{2} = x_1^2$

- បើ $l = 2n \Rightarrow x_2^2 = n\pi = x_3^2$ នៅពេលដែល $m = 5p$

$(E) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}}, x = \pm\sqrt{m\dfrac{\pi}{5}}$ ដែល $k = 0,1,2,\ldots$ និង $m = 0,1,2,\ldots$ ។ ២ពិន្ទុ

IV-(១៥ពិន្ទុ) រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់ចតុប្រអប់ដែលអាចផលិតបាន

គេមាន

$$D(a) = \frac{a^2 - \sqrt{a^4+4} + 2}{a} = \frac{(a^2+2)^2 - (a^4+4)}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})}$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \frac{4a^2}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})} = \frac{4}{(a^2+2+\sqrt{a^4+4})/a}$$

$$= \frac{4}{a + \frac{2}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}}}$$ ៣ពិន្ទុ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a + \frac{2}{a} \ge 2\sqrt{2},\ a^2 + \frac{4}{a^2} \ge 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}} \ge 2$$ ៣ពិន្ទុ

$$a + \frac{2}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}} \ge 2\sqrt{2} + 2 \Rightarrow D(a) = \frac{4}{a + \frac{2}{a} + \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2}}} \le \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = 2\sqrt{2} - 2$$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់ចតុប្រអប់ $Max(D(a)) = 2\sqrt{2} - 2$ ឯកតាប្រវែង។ ៣ពិន្ទុ

V.(១៥ពិន្ទុ) គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$

ដោយ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាឫសពហុធា $r(x)$ នោះគេបាន

$$r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = \prod_{i=1}^{5}(x-a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

ផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5) = (5-a_1^2)(5-a_2^2)(5-a_3^2)(5-a_4^2)(5-a_5^2)$ ៣ពិន្ទុ

$$p = \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5} - a_i) \times \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5} + a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5} - a_i) \times (-1)\left(\prod_{i=1}^{5}(-\sqrt{5} - a_i)\right) = -r(\sqrt{5})r(-\sqrt{5})$$ ២ពិន្ទុ

$$= -((\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1)((-\sqrt{5})^5 - 5(-\sqrt{5})^3 - 3(-\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1)$$ ២ពិន្ទុ

$$= -(-14 + 2\sqrt{5})(-14 - 2\sqrt{5}) = -176$$ ២ពិន្ទុ

89

add : Facebook: Sengnam chhun

VI-(២០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})$

គេមាន

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}$$ ៣ពិន្ទុ

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}=1$$ ៣ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2011}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{2}{2012})+f(\frac{2010}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{3}{2012})+f(\frac{2009}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

....

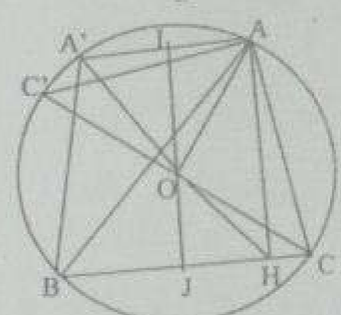
$$f(\frac{1005}{2012})+f(\frac{1007}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{1006}{2012})=f(1/2)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}=1/2$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន

$$S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})=1005+(1/2)=1005.5$$ ៣ពិន្ទុ

VII-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\angle BAC+\angle COH<\frac{\pi}{2}$



៤ពិន្ទុ

គេគូសអង្កត់ធ្នូ AA' ស្រប BC ហើយគេបាន $\angle ACB=\angle A'BC$

$$\angle A'BC-\angle ABC\geq\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle A'BC\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}$$ ២ពិន្ទុ

$$\angle CBA+\angle ABA'\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle ABA'\geq\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}$$ ២ពិន្ទុ

តាង I,J ជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ធ្នូ AA', BC រៀងគ្នា។

ត្រីកោណសមបាត OAA' មាន $\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}\Rightarrow AA'\geq OA=R$

គេបាន $AI\geq R/2$ ២ពិន្ទុ

90

$AIJH$ ជាចតុកោណកែង នោះគេបាន $AI = HJ \ge R/2$ ២ពិន្ទុ

ត្រីកោណកែង $JOH : OH > JH \ge R/2 \Rightarrow OH > R/2$ (1) ២ពិន្ទុ

តែ $HC = JC - JH < R - JH \le R/2 \Rightarrow HC < R/2$ (2)

$(1) \& (2) \Rightarrow HC < OH$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow \angle COH < \angle OCH$ ២ពិន្ទុ

គូសអង្កត់ផ្ចិត CC' ហើយគេបាន $\angle C'CB = \angle C'AB$ (ស្កាត់ធ្នូរ $C'B$)

$\angle COH < \angle OCH \Rightarrow \angle COH + \angle BAC < \angle OCH + \angle BAC$ ២ពិន្ទុ

$\angle COH + \angle BAC < \angle C'AB + \angle BAC = \angle C'AC = \pi/2$

ថ្ងៃទី ០២ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកចងក្រង

ថ្ងៃទី ០២ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុ ស៊ាងលី

CS.N

add: Facebook : Sengnam chhun

Page :

2012

Chhun Sengnam

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី២: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០៤-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គេតាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត x ហើយដែលកំណត់ដោយ $[x] \le x < [x]+1$ ។

បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\left[\frac{x}{b}\right] = \left[\frac{[x]}{b}\right]$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{p}\,x)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម។

បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យផលបូក $S(a,b) = (a+1)^b + (a+2)^b + (a+3)^b + (a+4)^b + (a+5)^b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន។

បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

IV. (២០ពិន្ទុ) សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a, b និង c ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a}$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC = 2a$ និងផ្ទៃក្រឡា s ។ D ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើជ្រុង AC ហើយដែល រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD ប៉ុនគ្នានឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ BCD ។

បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

១- បង្ហាញថា $x_{k+1} \cdot x_{k+2} - x_k \cdot x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះ $\forall k \in N$ ។

២- គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។

បង្ហាញថា $arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស 2012 (II)

ដំណោះស្រាយវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ប្រធាន ថ្នាក់ទី ៩ ដល់ទី ១២

សម័យប្រឡង: ០២.០៤.២០១២

សម្រាប់វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៤.០៤.២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនសូន្យ នោះ $[x/b]=[[x]/b]$:

តាង $a=[x]$ ហើយតាមវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ $a \& b$ គេបាន $a=bq+r, 0\le r<b$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $0\le r<b \Rightarrow bq\le bq+r<b(q+1)$ ហើយ $bq\le a<b(q+1)\Rightarrow q\le \dfrac{a}{b}<q+1$

គេទាញបាន $[a/b]=q$ ហើយ $[a/b]=[[x]/b]=q$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $[x]\le x<[x]+1\Rightarrow x=a+\varepsilon=bq+r+\varepsilon, 0\le\varepsilon<1$

គេបាន $[x/b]=[(bq+r+\varepsilon)/b]=[q+(r+\varepsilon)/b]$ ២ពិន្ទុ

តែ $0\le\varepsilon<1 \& 0\le r\le b-1\Rightarrow 0\le r+\varepsilon<b$ ហើយ $0\le(r+\varepsilon)/b<1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $q\le q+(r+\varepsilon)/b<q+1$ ហើយ $q\le[x/b]<q+1\Rightarrow[x/b]=q$ (2)

តាម $(1) \& (2)\Rightarrow[x/b]=[[x]/b]$ ។ ២ពិន្ទុ

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ :

ឧបមាថា f មានខួប T នោះគេបាន $f(x+T)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

បានន័យថា $\cos(x+T)+\cos(x\sqrt{p}+T\sqrt{p})=\cos x+\cos(x\sqrt{p})$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

ពិនិត្យចំពោះ $x=0$ គេបាន : $\cos T+\cos T\sqrt{p}=2 \Leftrightarrow \cos T=1\wedge\cos T\sqrt{p}=1$ ២ពិន្ទុ

$T=k2\pi\wedge T\sqrt{p}=m2\pi, k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$ ហើយ $\sqrt{p}=\dfrac{m2\pi}{k2\pi}=\dfrac{m}{k}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $\sqrt{p}\in\overline{Q_+}\wedge\dfrac{m}{k}\in Q_+$ នោះគេបាន $\sqrt{p}=\dfrac{m}{k}$ ជាករណីមិនអាចមាន។

ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។ ២ពិន្ទុ

III-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4

ចំពោះ $a\ge 0$ គេបាន $a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ ចែកនឹង 5 បានសំណល់ 0,1,2,3,4 ។ ២ពិន្ទុ

គេបាន $S(a,b)\equiv 0^b+1^b+2^b+3^b+4^b=1^b+2^b+3^b+4^b \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

តាមការសង្កេតគេបាន : $2^{4m}\equiv 1, 2^{4m+1}\equiv 2, 2^{4m+2}\equiv 4, 2^{4m+3}\equiv 3 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$3^{4m}\equiv 1, 3^{4m+1}\equiv 3, 3^{4m+2}\equiv 4, 3^{4m+3}\equiv 2 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$4^{4m}\equiv 1, 4^{4m+1}\equiv 4, 4^{4m+2}\equiv 1, 4^{4m+3}\equiv 4 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

-បើ $b=4m+1$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+1}+2^{4m+1}+3^{4m+1}+4^{4m+1}\equiv 1+2+3+4=10\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

93

-បើ $b=4m+2$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+2}+2^{4m+2}+3^{4m+2}+4^{4m+2}\equiv 1+4+4+1=10\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$

-បើ $b=4m+3$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន ២ពិន្ទុ

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+3}+2^{4m+3}+3^{4m+3}+4^{4m+3}\equiv 1+3+2+4=10\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។ ២ពិន្ទុ

IV-(២០ពិន្ទុ) គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}$ ៖

សមីការ $t^3=3t^2+4t-5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $t=0$ គឺថា $t\neq 0$

នោះគេបាន $t^3=3t^2+4t-5\Leftrightarrow t^{k+3}=3t^{k+2}+4t^{k+1}-5t^k$ ២ពិន្ទុ

ដោយ a, b និង c ជាឫសបីផ្សេងគ្នានោះគេបាន $a^{k+3}=3a^{k+2}+4a^{k+1}-5a^k$ (1),

$b^{k+3}=3b^{k+2}+4b^{k+1}-5b^k$ (2) , $c^{k+3}=3c^{k+2}+4c^{k+1}-5c^k$ (3) ២ពិន្ទុ

(1) − (2) រួចចែកនឹង $(a-b)$: $\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}=3\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+4\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}-5\dfrac{a^k-b^k}{a-b}$ (4) ២ពិន្ទុ

(2) − (3) រួចចែកនឹង $(b-c)$: $\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}=3\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+4\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}-5\dfrac{b^k-c^k}{b-c}$ (5) ២ពិន្ទុ

(3) − (1) រួចចែកនឹង $(c-a)$: $\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}+4\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}-5\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ (6) ២ពិន្ទុ

ដោយបូក(4) + (5) + (6) អង្គ និងអង្គ

$$\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}\right)+$$

$$+4\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}\right)-5\left(\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}\right) \quad (7)$$ ២ពិន្ទុ

តាង $F_k=\dfrac{a^k-b^k}{a-b}+\dfrac{b^k-c^k}{b-c}+\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ $\quad F_{k+1}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}$

$F_{k+2}=\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}$, $F_{k+3}=\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}$

គេបាន $F_{k+3}=3F_{k+2}+4F_{k+1}-5F_k$ (8) ២ពិន្ទុ

- បើ $k=0$ នោះគេបាន $F_0=0, F_1=1+1+1=3, F_2=2(a+b+c)=2\times 3=6$ ២ពិន្ទុ

ហើយតាម(8) គេបាន $F_3=3F_2+4F_1-5F_0=3\times 6+4\times 3-5\times 0=30$

- បើ $k=1$ នោះតាម(8) គេបាន $F_4=3F_3+4F_2-5F_1=90+24-15=99$

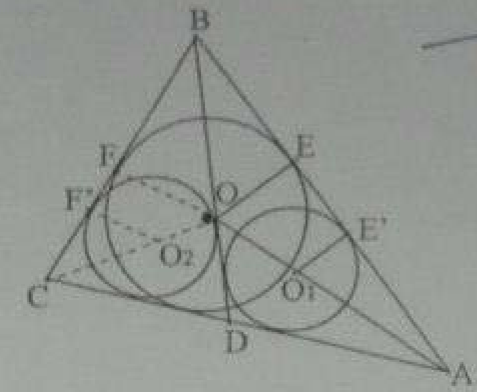
- បើ $k=2$ នោះតាម(8) គេបាន $F_5=3F_4+4F_3-5F_2=297+120-30=387$ ២ពិន្ទុ

- បើ $k=3$ នោះតាម(8) គេបាន $F_6=3F_5+4F_4-5F_3=1161+396-150=1407$

- បើ $k=4$ នោះតាម(8) គេបាន $F_7=3F_6+4F_5-5F_4=4221+1548-495=5274$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}=5274$ ២ពិន្ទុ

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $BD=\sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$:



៤ពិន្ទុ

តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABD s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃ ΔBCD

p ជា កន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABD និង ΔBCD

E និង E' ជាចំនុចប៉ះរវាង AB ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC និង ΔABD

F និង F' ជាចំនុចប៉ះរវាង BC ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC និង ΔBCD

គេបាន : $s=s_1+s_2$, $pr=p_1r'+p_2r'=(p_1+p_2)r'$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត : $2p_1+2p_2=2p+2BD \quad \Rightarrow p_1+p_2=p+BD$

(1) អាចសរសេរ : $pr=(p+BD)r'$ ហើយ $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p}{p+BD}$ (2) ២ពិន្ទុ

$\Delta E'AO_1 \sim \Delta EAO : \dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{r'}{r}$ ហើយ $\Delta F'CO_2 \sim \Delta FCO : \dfrac{CF'}{CF}=\dfrac{r'}{r}$ (3) ២ពិន្ទុ

ក្នុង ΔABC គេមាន $p=AE+BF+FC=AE+BC \Rightarrow AE=p-BC$

ក្នុង ΔABC គេមាន $p=CF+AE+EB=CF+AB \Rightarrow CF=p-AB$

ក្នុង ΔABD គេមាន $AE'=p_1-BD$ ក្នុង ΔBCD គេមាន $CF'=p_2-BD$ ២ពិន្ទុ

$$(3):\ \frac{r'}{r}=\frac{p_1-BD}{p-BC}=\frac{p_2-BD}{p-AB}=\frac{p_1+p_2-2BD}{2p-(BC+AB)}$$

$$\frac{r'}{r}=\frac{p+BD-2BD}{AC}=\frac{p-BD}{AC} \quad (4)$$ ២ពិន្ទុ

តាម (2) និង (4) : $\dfrac{p}{p+BD}=\dfrac{p-BD}{AC} \Rightarrow p\cdot AC=p^2-BD^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow BD^2=p(p-AC)=p\cdot BE$ (5)   ព្រោះ $BI=p-AC$

ក្នុង ΔEBO : $BE=\dfrac{r}{\tan a}$ ២ពិន្ទុ

$$(5): BD^2=\frac{pr}{\tan a}=\frac{s}{\tan a} \Rightarrow BD=\sqrt{\frac{s}{\tan a}}$$ ២ពិន្ទុ

VI-(២០ពិន្ទុ) ១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

- ចំពោះ $k=1$ គេបាន $x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4=1\times 2-1\times 3=-1=(-1)^1$

-ឧបមាថាពិត ដល់ $k=p$ គឺថា $x_{p+1}\cdot x_{p+2}-x_p\cdot x_{p+3}=(-1)^p$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាករណី $k=p+1$

$x_{p+2}\cdot x_{p+3}-x_{p+1}\cdot x_{p+4}=x_{p+2}(x_{p+1}+x_{p+2})-x_{p+1}(x_{p+2}+x_{p+3})$

$=(x_{p+2})^2-x_{p+1}(x_{p+1}+x_{p+2})=(x_{p+2})^2-(x_{p+1})^2-x_{p+1}x_{p+2}$ ២ពិន្ទុ

$=(x_{p+2}-x_{p+1})(x_{p+2}+x_{p+1})-x_{p+1}x_{p+2}$

$=(x_{p+1}+x_p-x_{p+1})(x_{p+3})-x_{p+1}x_{p+2}$

$=x_p x_{p+3}-x_{p+1}x_{p+2}$

$=(-1)(x_{p+1}x_{p+2}-x_p x_{p+3})=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$ ២ពិន្ទុ

ដូច្នេះ $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

២- បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

គេដឹងថា $a=\cot\alpha, b=\cot\beta\Leftrightarrow\alpha=arc\cot a,\beta=arc\cot b$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta=arc\cot\left(\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$\Leftrightarrow arc\cot a-arc\cot b=arc\cot\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i+1}-x_{2i}}\right)=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i}+x_{2i-1}-x_{2i}}\right)$$

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i-1}}\right)\qquad(1)$$ ២ពិន្ទុ

តាមសំណួរទី១ ខាងលើ និងយក $k=2i-1$ នោះគេបាន ២ពិន្ទុ

$x_{2i}\cdot x_{2i+1}-x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}=-1\Rightarrow x_{2i}\cdot x_{2i+1}+1=x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}$

តាម (1) គេបាន $arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot x_{2i+2}$

ដោយជំនួសតម្លៃ $i=1,2,3,\cdots,1005$ នោះគេបាន

$arc\cot x_1-arc\cot x_3=arc\cot x_4$ (ព្រោះ $x_2=x_1$) ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_4-arc\cot x_5=arc\cot x_6$

.... ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_{2010}-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$ ។

ថ្ងៃទី ០៩ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

ថ្ងៃទី ០៩ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកកត់ត្រា

Facebook : Sengnam Chhuh

96

Page :

Group : 2013 ......