រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

117 លំហាត់ វិសមភាពជ្រើសរើស

$$a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Problem and Solution

ជំពូកទី១

លំហាត់ជ្រើសរើស

1. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

2. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a, b, c \geq 0$ គេមានវិសមភាព

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

3. ចូរបង្ហាញថា $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

4. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c, x, y, z ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} \geq \sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$

5. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b និង c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$ ។

6. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$

7. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ។

8. បើ $a,b,c\in(0,1)$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

9.គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}+\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

10. គេឱ្យ a,b,c,d ជាបួនចំនួនពិតដែល $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3+b^3+c^3+d^3\leq 8$ ។

11. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 2\left(\dfrac{b+c}{2}-a\right)^3$ ។

12. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[5]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ ។

13. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+\dfrac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

14. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=a+b+c$

ចូរស្រាយថា $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le ab+bc+ca$ ។

15. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$$

16. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$ ។

17. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$ ។

18. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$$

19. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x,y,z ចូរស្រាយថា :

$$2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)\ge(1+x)(1+y)(1+z)(1+xyz)$$

20. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c,d ចូរស្រាយថា :

$$4(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2)\ge(1+abcd)^2$$

21. បើសមីការ $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយ

ជាចំនួនពិតនោះបង្ហាញថា $a^4+b^4\ge 8$ ។

22. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

23. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

24. គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1$$

25. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

26. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 4(a+b+c-1)$

27. ចូរបង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

28. គេយក a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

29. គេឱ្យ x,y,z,t ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+t}\right)^2+\left(\frac{t}{t+x}\right)^2\ge 1$$ ។

30. គេឱ្យ a,b,c និង x,y,z ជាចំនួនពិត ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2)\ge 3(bcx+cay+abz)^2$$

31. គេឱ្យបីចំនួនពិត $a>-1$, $b>-1$, $c>-1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\ge 2$$ ។

32. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\ge\frac{3}{8}$$ ។

33. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$$ ។

34. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b និង c ។ ចូរស្រាយថា

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

35. ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេមានវិសមភាព :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ។

36. គេយក $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^m+a^n\geq m^m+n^n$ ។

37. គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$$

38. គេឱ្យ $a\,,\,b\,,c$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\dfrac{1}{abc}$

39. គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\leq\sqrt{2}-1$ ។

40. ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z\geq 0$ ។

41. គេឱ្យ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a}{b-a+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3$ ។

42. គេឱ្យ $a, b\,,\,c$ ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a|+|b|+|c|-abc\leq 4$ ។

43. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$ ។

44. គេឱ្យ $a\ge 1$ និង $b\ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ ។

45. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$$ ។

46.គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\ge 0$ ។

47. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\ge\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

48. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x}>(\sin x)^{\sin x}$ ។

49. គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

50. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$ ។

51. គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n\geq 2$) ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

52. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x+y}{1+z^2}+\dfrac{y+z}{1+x^2}+\dfrac{z+x}{1+y^2}\geq\dfrac{27}{2xyz}$ ។

53. ចូរបង្ហាញថាបើ $abc=8$ និង $a, b, c>0$ នោះគេបាន :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

54. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

ហើយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a+b}{\cos C}+\dfrac{b+c}{\cos A}+\dfrac{c+a}{\cos B}\geq 4(a+b+c)$

55. គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2} + \dfrac{y^3}{(1-y)^2} + \dfrac{z^3}{(1-z)^2} \geq \dfrac{1}{4}$ ។

56. គេឱ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd = 1$ ។

បើគេដឹងថា $a + b + c + d > \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d} + \dfrac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a + b + c + d < \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{a}{d}$ ។

បង្ហាញថា $a + b + c + d < \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{d}{c} + \dfrac{a}{d}$

57. គេយក a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)} + \dfrac{b}{(b+1)(c+1)} + \dfrac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \dfrac{3}{4}$ ។

58. គេយក a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\dfrac{a}{b})(1+\dfrac{b}{c})(1+\dfrac{c}{a}) \geq 2(1+\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

59. គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ ។

60. គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab + bc + ca = abc$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \dfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \dfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1$ ។

61. គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\geq\frac{3}{2}$ ។

62. ចំនួនពិត $a, , b , c , x , y , z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\geq b\geq c>0$

និង $x\geq y\geq z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{3}{4}$$ ។

63. ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x , y , z<1$ ។

64. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

65. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$ ។

66. គេឱ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$$ ។

67. បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$

នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$ ។

68. គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$ ។

69. គេឱ្យ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

70. គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

$$S=\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)}+\frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}$$

ចូរបង្ហាញថា $S\geq\frac{a+b+c+d}{4}$ ។

71. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1 , x_2 , ... , x_n$ ហើយគេតាង

$S_n=x_1+x_2+...+x_n$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$$

72. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1a_2a_3....a_n = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ។

73. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2} \le \frac{3}{16}$$ ។

74. សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ ។

75. ចូរស្រាយថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

76. បើ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$ ។

77. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c)\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq\frac{8}{9}$$

78. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\leq\frac{3}{8}$ ។

79. គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង $x,\ y\ ,\ z$

ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$ ។

80. គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$ ។

81. គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$$ ។

82. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេកំណត់តាង $A=\frac{a+b+c}{3}$

$G=\sqrt[3]{abc}$ និង $H=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\frac{A}{G}\right)^3\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$?

83. គេឱ្យចំនួនពិត x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1>0,x_2>0$

$x_1y_1-z_1^{\,2}>0$ និង $x_2y_2-z_2^{\,2}>0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-z_1^{\,2}}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^{\,2}}\ (*)$$

84. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

85. គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$ ។

86. គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\ge 0$ ។

87. គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។

ចូរស្រាយតាមកំណើនថា :

$$\frac{a_1^{\ 2}}{x_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{x_2} + ... + \frac{a_n^{\ 2}}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$ ។

88. គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$?

89. គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geq \frac{1}{2}$$

90. គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 ; a_2 ; ....; a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$a_1 = 0 ; |a_2| = |a_1 + 1| ; ...$ និង $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

91.គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$ ។

92.គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ ។

93.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$ ។

94.គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

95.គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$ ។

96.គេឱ្យ $a\,;\,b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$$ ។

97.ប្រសិនបើ $xyx=(1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0\le x;y;z\le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge\frac{3}{4}$ ។

98.គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$ ។

99.គេឱ្យ $x ; y ; z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$ ។

100. គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

101. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

102. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{29a^3-b^3}{ab+6a^2}+\frac{29b^3-c^3}{bc+6b^2}+\frac{29c^3-a^3}{ca+6c^2}\leq 4(a+b+c)$$

103. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

104. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

105. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$

ហើយមុំក្នុង A,B,C ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq\frac{9}{16S^2}$ ។

106. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

107. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

108. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

109.គេយក x ជាចំនួនពិត ដោយដឹងថា $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos^2(x)\cot(x)+\sin^2(x)\tan(x)\geq 1$ ។

110. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{21}{16}$

និងចំពោះ $n \geq 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m \geq 2$ ។

ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n \leq m$ យើងបាន :

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1} \quad ?$$

111. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a + b^2} + \frac{b^2}{b + c^2} + \frac{c^2}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}$

112. គេឱ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab + bc + ca \quad ។$$

113. គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម :

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} \quad (\, n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1 \,)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

114. ចំពោះគ្រប់ a, b, c ធំជាងមួយ ចូរបង្ហាញថា :

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

115. គេតាង α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R ។

a/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$$

b/ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

116. គេយក a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$ ។

117. គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី២

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ចូរស្រាយថា $a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b

ឧបមាថា $a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$ ពិត

លើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពជាការេគេបាន :

$$(a+b)^2 \geq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)^2$$

$$a^2+2ab+b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}+2\sqrt{ab}\,.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+ab$$

$$a^2+2ab+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}-2\sqrt{ab}\,.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-ab \geq 0$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}-2\sqrt{ab}.\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+ab=\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\right)^2 \geq 0$$

ដូចនេះ $a+b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $a,b,c\geq 0$ គេមានវិសមភាព

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

គេមានសមភាព

$$(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+a^2c+ab^2+b^2a+ac^2+bc^2+2abc$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+a^2c+ab^2+ab^2+ac^2+bc^2+3abc$$

ធ្វើផលដកសមភាពពីរនេះគេបាន

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc\ (1)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} a+b\geq 2\sqrt{ab} \\ b+c\geq 2\sqrt{bc} \\ c+a\geq 2\sqrt{ac} \end{cases}$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc\quad (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(a+c)\geq \dfrac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរបង្ហាញថា $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \le \frac{8}{27}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$2(a+b+c) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ 3 គេបាន :

$$8(a+b+c)^3 \ge 27(a+b)(b+c)(c+a)$$

ដូចនេះ $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \le \frac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,x,y,z ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} \geq \sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$

គេមាន :

$$(x+a)(y+b)(z+c)=xyz+ayz+bxz+cxy+abz+acy+bcx+abc$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$ayz+bxz+cxy \geq 3\sqrt[3]{abcx^2y^2z^2}$$

$$abz+acy+bcx \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2xyz}$$

គេបាន :

$$(x+a)(y+b)(z+x) \geq xyz+3\sqrt[3]{abcx^2y^2z^2}+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2xyz}+abc$$

$$(x+a)(y+b)(z+c) \geq (\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc})^3$$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} \geq \sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$ ។

លំហាត់ទី៥

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b និង c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$ ។

របៀបទី១ : តាមវិសមភាព $\textbf{Cauchy – Schwarz}$

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)$$

យក $a_1=\sqrt{\frac{a}{b+c}}$, $a_2=\sqrt{\frac{b}{c+a}}$, $a_3=\sqrt{\frac{c}{a+b}}$

និង $b_1=\sqrt{a(b+c)}$, $b_2=\sqrt{b(c+a)}$, $b_3=\sqrt{c(a+b)}$

$$(a+b+c)^2\le(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})(2ab+2bc+2ca)$$

គេទាញ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$ $\quad(1)$

តាមវិសមភាព $\textbf{AM – GM}$ គេមាន :

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ac$$

ឬ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

ឬ $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ $\quad(2)$

តាមវិសមភាព (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$ ។

របៀបទី២ :

គេមាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

គេបាន $(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{c+a}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)\geq\frac{3}{2}+3$

ឬ $\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$

ឬ $(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq\frac{9}{2}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \quad (2)$$

គុណវិសមភាព **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$2(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq 9$$

គេទាញ $(a+b+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq\frac{9}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\geq\frac{2}{(x+y)(y+z)}\quad(1)$$

$$\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{2}{(y+z)(z+x)}\quad(2)$$

$$\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\geq\frac{2}{(z+x)(x+y)}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)$ និង (3) គេបាន :

$$2\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geq\frac{4(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(x+z)}$$

ដូចនេះ

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\geq\frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ។

តាមវិសមភាព **Minkowsky** គេមាន :

$$\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}+\sqrt{x_3{}^2+y_3{}^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$$

យក $x_1=a\ ,\ x_2=b\ ,\ x_3=c$

និង $y_1=1-b\ ,\ y_2=1-c\ ,\ y_3=1-a$ និង $s=a+b+c$

គេបាន $(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2=s^2+(3-s)^2\geq\frac{9}{2}$

ព្រោះ $s^2+(3-s)^2=2s^2-6s+9=\frac{1}{2}[(2s-3)^2+9]\geq\frac{9}{2}$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$ ។

លំហាត់ទី៨ (Junior TST 2002, Romania)

បើ $a,b,c\in(0,1)$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

យើងដឹងថាចំពោះ $x\in(0,1)$ គេមាន $\sqrt{x}<\sqrt[3]{x}$

ហេតុនេះ $\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}\quad(1)$

និង $\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\quad(2)$

បូកវិសមភាព $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន :

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\quad(3)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\quad(4)$$

$$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\frac{1-a+1-b+1-c}{3}=\frac{3-(a+b+c)}{3}\quad(5)$$

បូកវិសមភាព $(4)\,\&\,(5)$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\frac{(a+b+c)+3-(a+b+c)}{3}$$

$$\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le 1\quad(6)$$

តាមវិសមភាព $(3)\,\&\,(6)$ គេបាន :

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

គេបាន $\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$\frac{b+c}{\sqrt{a}}\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$ (2) និង $\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}$ (3)

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន :

$$\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)\quad(4)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\geq 2\sqrt{a}$ (5)

$\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\geq 2\sqrt{b}$ (6) និង $\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\geq 2\sqrt{c}$ (7)

បូកវិសមភាព $(5),(6)\,\&\,(7)$ គេបាន :

$$2\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\ (8)$$

ព្រោះ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ ($abc=1$)

តាម $(4)\,\&\,(8)$ គេបាន $\frac{a+b}{\sqrt{c}}+\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ $\mathbf{a,b,c,d}$ ជាបួនចំនួនពិតដែល $\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2=4}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{a^3+b^3+c^3+d^3 \le 8}$ ។

គេមាន $\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2=4}$

គេទាញ $\mathbf{b^2+c^2+d^2=4-a^2 \ge 0}$ ឬ $\mathbf{a^2 \le 4}$ ឬ $\mathbf{a \le 2}$

ដោយ $\mathbf{a^2 \ge 0}$ នោះ $\mathbf{a^3 \le 2a^2}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\mathbf{b^3 \le 2b^2}$ **(2)** , $\mathbf{c^3 \le 2c^2}$ **(3)** , $\mathbf{d^3 \le 2d^2}$ **(4)**

បូកវិសមភាព **(1),(2),(3) & (4)** អង្គ និង អង្គគេបាន :

$\mathbf{a^3+b^3+c^3+d^3 \le 2(a^2+b^2+c^2+d^2)=8}$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{a^3+b^3+c^3+d^3 \le 8}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$

នោះ $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ ។

បើ $\frac{b+c}{2}-a \leq 0$ នោះវិសមភាពខាងលើពិតជានិច្ច ។

យើងឧបមាថា $\frac{b+c}{2}-a > 0$ ។

តាង $T = a^3+b^3+c^3-3abc-2(\frac{b+c}{2}-a)^3$

យក $b=a+2x$ និង $c=a+2y$ នោះ $b+c=2a+2x+2y$

ដែល $x \geq 0$, $y \geq 0$ ។

គេបាន :

$$T = a^3+(a+2x)^3+(a+2y)^3-3a(a+2x)(a+2y)-2(x+y)^3$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមរួចគេបាន :

$$T = 12a(x^2-xy+y^2)+6(x+y)(x-y)^2 \geq 6(x+y)(x-y)^2$$

$$T = 6(\frac{b+c}{2}-a)(\frac{b-c}{2})^2 \geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ ។

ឧបមាថា $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ ពិត

សមមូល $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

សមមូល $(a+b+c)^5\ge 81(a^2+b^2+c^2)=81abc(a^2+b^2+c^2)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}\ge xy+yz+zx$$

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\ge xy+yz+zx$$

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

យក $x=ab$, $y=bc$, $z=ca$ គេបាន :

$(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

នោះ $(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

ដើម្បីស្រាយថា $(a+b+c)^5\ge 81abc(a^2+b^2+c^2)$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយថា $(a+b+c)^6\ge 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$

តាង $\mathbf{T=(a+b+c)^6-27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2}$

យក $\mathbf{S=a+b+c}$ និង $\mathbf{P=ab+bc+ca}$

នោះ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=S^2-2P}$

គេបាន $\mathbf{T=S^6-27(S^2-2P)P^2}$

$$\mathbf{=S^6-27S^2P^2+54P^4}$$

$$\mathbf{=(S^2-3P)^2(S^2+6P^2)\geq 0}$$

ដូចនេះ $\mathbf{\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[5]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

តាមសមភាព $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

ដោយ $(x+y+z)^2\geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x,y,z នោះគេបាន :

$x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)$ (*)

យក $x=\frac{a}{b-c}$, $y=\frac{b}{c-a}$, $z=\frac{c}{a-b}$ នោះគេបាន :

$$xy+yz+zx=\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ac}{(a-b)(b-c)}$$
$$=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{b(c-a)(b-c-a)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេទាញបាន $x^2+y^2+z^2\geq -2(-1)=2$

ដូចនេះ $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=a+b+c$ ។

ចូរស្រាយថា $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le ab+bc+ca$ ។

គេមាន $a^2+b^2+c^2=a+b+c$

គេបាន $(a^2+b^2+c^2)^2=(a+b+c)^2$

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$$2(ab+bc+ca-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)=a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2$$

តាមសមភាពនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le ab+bc+ca$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $a^4+b^4+c^4\ge a^2+b^2+c^2$ ។

តាមវិសមភាព **Holder** គេមាន :

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\ge(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$$

យក $a_1=b_1=a^{\frac{2}{3}}$, $a_2=b_2=b^{\frac{2}{3}}, a_3=b_3=c^{\frac{2}{3}}$

និង $c_1=a^{\frac{4}{3}}, c_2=b^{\frac{4}{3}}$, $c_3=c^{\frac{4}{3}}$ គេបាន

$$(a^2+b^2+c^2)^2(a^4+b^4+c^4)\ge(a^2+b^2+c^2)^3$$

នាំឱ្យ $a^4+b^4+c^4\ge a^2+b^2+c^2$ ពិត

ដូចនេះ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $x^2+y^2\ge 2xy$

នាំឱ្យ $x^2+y^2+3x^2+3y^2+4xy\ge 2xy+3x^2+3y^2+4xy$

ឬ $4(x^2+xy+y^2)\ge 3(x+y)^2$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និង y ។

ហេតុនេះចំពោះa,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន គេទាញបាន :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(\frac{3}{4})^3(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

យើងនឹងស្រាយថា : $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge(\frac{4}{3})^3(ab+bc+ca)^3$

គេមានសមភាព

$$(a+b)(b+c)(c+a)=a^2b+a^2c+ab^2+b^2a+ac^2+bc^2+2abc$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=a^2b+a^2c+ab^2+ab^2+ac^2+bc^2+3abc$$

ធ្វើផលដកសមភាពពីរនេះគេបាន

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc\ (1)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ b+c\ge 2\sqrt{bc} \\ c+a\ge 2\sqrt{ac}\end{cases}$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc\quad(2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$9(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

ឬ $(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2\ge \frac{64}{81}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$ (3)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ac$$

ឬ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

ឬ $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ (4)

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន :

$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge (\frac{4}{3})^3(ab+bc+ca)^3$ ពិត

ដូចនេះ

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge (ab+bc+ca)^3$$

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$ ។

តាង $T=\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន :

$$(a^2+b^2)^2=(a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{3}{2}})^2\le(a+b)(a^3+b^3)$$

គេទាញ $a^2+b^2\le\sqrt{a+b}\,.\sqrt{a^3+b^3}$

ឬ $\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}\ge\frac{c}{\sqrt{a+b}}$ (1) ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}\ge\frac{a}{\sqrt{b+c}}$ (2) និង $\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\ge\frac{b}{\sqrt{c+a}}$ (3)

បូកវិសមភាព (1),(2) & (3) គេបាន :

$$T\ge\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន :

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\ge3\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\ (4)$$

ដោយ $a+b+c=\frac{a}{\sqrt{b+c}}.\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}.\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}$

គេបាន៖

$$(a+b+c)^2 \le [(b+c)+(c+a)+(a+b)](\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b})$$

$$(a+b+c)^2 \le 2(a+b+c)(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b})$$

គេទាញ $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}$ **(5)**

តាម **(4) & (5)** គេបាន $\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \ge \frac{9}{2}$

នាំឱ្យ $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$ នោះ $T \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$ ។

តាង $S=\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}$

យក $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$

គេបាន $S=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $u>0$ គេមាន :

$$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)\le\left(\frac{1+x+1-x+x^2}{2}\right)^2=(1+\frac{1}{2}x^2)^2$$

គេទាញបាន $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ge\frac{1}{1+\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{1+\frac{(b+c)^2}{2a^2}}$

ដោយ $1+\frac{(b+c)^2}{2a^2}\le 1+\frac{2(b^2+c^2)}{2a^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}$

គេទាញបាន $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

ដូចនេះ $S\ge\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$$

យក $S=\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}$

តាង $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y=\sqrt{\frac{c}{b}}$, $z=\sqrt{\frac{a}{c}}$ ហើយ $xyz=1$

គេបាន $S=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

ឧបមាថា $x\ge y\ge z$ គេបាន $x^3\ge xyz=1$ ឬ $x\ge 1$ ហើយ $yz=\frac{1}{x}\le 1$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)$$

ដោយ $\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=\frac{2+y^2+z^2}{1+y^2+z^2+z^2y^2}=1+\frac{1-y^2z^2}{1+y^2+z^2+y^2z^2}$

ហើយ $\frac{1-z^2y^2}{1+y^2+z^2+y^2z^2}\le\frac{(1-yz)(1+yz)}{1+2yz+y^2z^2}=\frac{1-yz}{1+yz}$

គេបាន $\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le 2\left(1+\frac{1-yz}{1+yz}\right)=\frac{4}{1+yz}$

គេទាញបាន $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+yz}}$

ហេតុនេះ $S\le\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

គេមាន $(1+x)^2\le 2(1+x^2)$ ឬ $1+x\le\sqrt{2}.\sqrt{1+x^2}$

នោះ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{1+x}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{yz}}=\frac{\sqrt{2}yz}{1+yz}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{\sqrt{2}yz}{1+yz}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}$

ហើយ $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}yz}{1+yz}-\frac{2}{\sqrt{1+yz}}=\frac{3(1+yz)-2yz-2\sqrt{2}\sqrt{1+yz}}{(1+yz)\sqrt{2}}$

$$=\frac{3+yz-2\sqrt{2}\sqrt{1+yz}}{(1+yz)\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+yz})^2}{(1+yz)\sqrt{2}}\ge 0$$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{\sqrt{2}yz}{1+yz}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x, y, z ចូរស្រាយថា :

$$2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq (1+x)(1+y)(1+z)(1+xyz)$$

បើ $y = z = x$ នោះវិសមភាពទៅជា $2(1+x^2)^3 \geq (1+x)^3(1+x^3)$

សមមូល $2(1+x^2)^3 - (1+x)^3(1+x^3) \geq 0$

សមមូល $(1-x)^4(1+x+x^2) \geq 0$ ពិត

ហេតុនេះគេបាន $\begin{cases} 2(1+x^2)^3 \geq (1+x)^3(1+x^3) \\ 2(1+y^2)^3 \geq (1+y)^3(1+y^3) \\ 2(1+z^2)^3 \geq (1+z)^3(1+z^3) \end{cases}$

គុណវិសមភាពនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$[2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)]^3 \geq [(1+x)(1+y)(1+z)]^3 \times P$$

ឬ $2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq (1+x)(1+y)(1+z)\sqrt[3]{P}$ (*)

ដែល $P = (1+x^3)(1+y^3)(1+z^3)$

$$= 1 + (x^3+y^3+z^3) + (x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) + x^3y^3z^3$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$P \geq 1 + 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} + 3\sqrt[3]{x^6y^6z^6} + x^3y^3z^3 = (1+xyz)^3$$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេបាន :

$2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq (1+x)(1+y)(1+z)(1+xyz)$ ពិត ។

លំហាត់ទី២០

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c,d ចូរស្រាយថា :

$$4(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2)\ge(1+abcd)^2$$

បើ $d=c=b=a$ វិសមភាពក្លាយជា $4(1-a+a^2)^4\ge(1+a^4)^2$

សមមូល $2(1-a+a^2)^2\ge 1+a^4$

សមមូល $2(1-a+a^2)^2-(1+a^4)=(1-a)^4\ge 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\begin{cases}2(1-a+a^2)^2\ge 1+a^4\\ 2(1-b+b^2)^2\ge 1+b^4\end{cases}$

គេបាន $4(1-a+a^2)^2(1-b+b^2)^2\ge(1+a^4)(1+b^4)$

ដោយ $(1+a^4)(1+b^4)=1+(a^4+b^4)+a^4b^4\ge 1+2a^2b^2+a^4b^4$

ឬ $(1+a^4)(1+b^4)\ge(1+a^2b^2)^2$

គេទាញ $4(1-a+a^2)^2(1-b+b^2)^2\ge(1+a^2b^2)^2$

ឬ $2(1-a+a^2)(1-b+b^2)\ge 1+a^2b^2 \quad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $2(1-c+c^2)(1-d+d^2)\ge 1+c^2d^2 \quad (2)$

ហើយ $(1+a^2b^2)(1+c^2d^2)\ge(1+abcd)^2$

ធ្វើផលគុណវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន :

$$4(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2)\ge(1+abcd)^2$$

លំហាត់ទី២១ (Tournament of the Towns,1993)

បើសមីការ $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយជាចំនួនពិត នោះបង្ហាញថា $a^4+b^4\ge 8$ ។

តាង $x_0\in IR$ ដែល $x_0\ne 0$ ជាឫសរបស់សមីការនោះគេបាន :

$x_0{}^4+ax_0{}^3+2x_0{}^2+bx_0+1=0$ ឬ $ax_0{}^3+bx_0=-(x_0{}^2+1)^2$

តាមវិសមភាព $\textbf{Cauchy}-\textbf{Schwarz}$ គេបាន :

$$(x_0+1)^4=(ax_0{}^3+bx_0)^2\le(x_0{}^6+x_0{}^2)(a^2+b^2)$$

គេទាញ $a^2+b^2\ge\dfrac{(x_0{}^2+1)^4}{x_0{}^6+x_0{}^2}$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{(x_0{}^2+1)^4}{x_0{}^6+x_0{}^2}\ge 8$

គេមាន $(x_0{}^2+1)^4-8(x_0{}^6+x_0{}^2)=x_0{}^4-4x_0{}^3+6x_0{}^2-4x_0+1$

ឬ $(x_0{}^2+1)^4-8(x_0{}^6+x_0{}^2)=(x_0-1)^4\ge 0$

គេទាញបាន $\dfrac{(x_0{}^2+1)^4}{x_0{}^6+x_0{}^2}\ge 8$ ពិត

ដូចនេះ $a^4+b^4\ge 8$ ។

លំហាត់ទី២២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** :

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

យក $a_1=\frac{\sqrt{a}}{b+c}\ ,\ a_2=\frac{\sqrt{b}}{c+a}, a_3=\frac{\sqrt{c}}{a+b}$

និង $b_1=\sqrt{a}\ ,\ b_2=\sqrt{b}\ ,\ b_3=\sqrt{c}$ គេបាន :

$$\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right](a+b+c)\ge\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2$$

ដោយ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (មើលលំហាត់ទី៥)

គេទាញ $\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right](a+b+c)\ge\frac{9}{4}$

ដូចនេះ $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$ ។

លំហាត់ទី២៣ (JBMO 2002 Shortlist)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz :

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

យក $a_1=\sqrt{a}$, $a_2=\sqrt{b}$, $a_3=\sqrt{c}$

និង $b_1=\frac{a\sqrt{a}}{b}$, $b_2=\frac{b\sqrt{b}}{c}$, $b_3=\frac{c\sqrt{c}}{a}$ គេបាន :

$$(a+b+c)\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)\ge\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 \quad (1)$$

បើគេយក $a_1=\frac{a}{\sqrt{b}}$, $a_2=\frac{b}{\sqrt{c}}$, $a_3=\frac{c}{\sqrt{a}}$

និង $b_1=\sqrt{b}$, $b_2=\sqrt{c}$, $b_3=\sqrt{a}$ គេបាន :

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(a+b+c)\ge(a+b+c)^2 \quad (2)$$

គុណវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គ រួចសម្រួលកត្តា $(a+b+c)^2$

និង $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ គេបាន $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ។

លំហាត់ទី២៤ (Crux Mathematicorum)

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$

គេមាន $(x+y)(x+z)=x^2+xy+yz+xz\ge xy+2x\sqrt{yz}+zx$

$$(x+y)(x+z)\ge(\sqrt{xy}+\sqrt{xz})^2$$

$$\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge\sqrt{xy}+\sqrt{xz}$$

$$x+\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge x+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

គេទាញ $\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}\le\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ **(2)**

និង $\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$ **(3)**

ធ្វើផលបូកវិសមភាព **(1), (2) & (3)** គេបាន :

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$

លំហាត់ទី២៥

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $x>0$, $y>0$ គេមាន :

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$$

ឬ $(x+y)^2\geq 4xy$

ឬ $\frac{4}{x+y}\leq\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

យក $x=\frac{b}{a}$ និង $y=\frac{c}{a}$ គេបាន $\frac{4a}{b+c}\leq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{4b}{c+a}\leq\frac{b}{c}+\frac{b}{a}$ (2) និង $\frac{4c}{a+b}\leq\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ (3)

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1),(2) & (3) គេបាន :

$$\frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}\leq\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

ដូចនេះ $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$ ។

លំហាត់ទី២៦ (MOSP,2001)

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1)$

មាន $(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc \ (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(a+b)(b+c)(a+c)\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}=8abc \quad (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

ដើម្បីបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1)$

យើងត្រូវស្រាយថា $\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 4(a+b+c-1)$ ពិត

ឬ $\frac{2}{9}.(ab+bc+ca)+\frac{1}{a+b+c}\ge 1$ ពិត

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\frac{ab+bc+ca}{9}+\frac{ab+bc+c}{9}+\frac{1}{a+b+c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{81(a+b+c)}}$$

ឬ $\frac{2}{9}(ab+bc+ca)+\frac{1}{a+b+c}\ge \sqrt[3]{\frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a+b+c)}}\ge 1$ ពិត

ព្រោះ $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$ ។

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1)$ ។

លំហាត់ទី២៧ (APMO,2004)

ចូរបង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

គេមាន $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$

ដើម្បីបង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$

គេមាន $\dfrac{u^2+2}{3}=1+\dfrac{u^2-1}{3}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរ :

$$(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$$

តាមសមភាព $(1+x)(1+y)=1+x+y+xy$

បើ x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នានោះ $xy\ge 0$

ហេតុនេះ $(1+x)(1+y)\ge 1+x+y$ គ្រប់ចំនួនពិត x,y ។

-បើ $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ ឬ $x\le 0, y\le 0$, $z\ge 0$ គេបាន :

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ge(1+x+y)(1+z)\ge 1+x+y+z \quad (1)$$

-បើ $-1<x<0$, $-1<y<0$,$-1<z<0$ នោះ $x+y$ និង z

មានសញ្ញាដូចគ្នា ហើយ $(1+x+y)(1+z)\ge 1+x+y+z$

គេបាន $(1+x)(1+y)(1+z)\ge 1+x+y+z$

យើងសិក្សាវិសមភាពតាមបីករណីដូចខាងក្រោម :

1-បើ $a,b,c\ge 1$ នោះ $\frac{a^2-1}{3}\ge 0,\frac{b^2-1}{3}\ge 0,\frac{c^2-1}{3}\ge 0$

តាមលក្ខណៈ (1) គេបាន :

$$(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge 1+\frac{a^2+b^2+c^2-3}{3}$$

$$(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

ដោយ $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$ (Cauchy – Schwarz)

គេបាន $(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$ ពិត

2-បើ $0<a,b,c<1$ នោះ $\frac{a^2-1}{3}<0,\frac{b^2-1}{3}<0,\frac{c^2-1}{3}<0$

តាមលក្ខណៈ (2) គេបាន :

$$(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge 1+\frac{a^2+b^2+c^2-3}{3}$$

$$(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\frac{(a+b+c)^2}{9}$$ ពិត

3-បើ a,b,c មានពីរដែលធំជាង 1 នោះយើងសន្មតថា $a\ge 1,b\ge 1,c<1$

គេបាន $(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})\ge 1+\frac{a^2+b^2-2}{3}=\frac{1+a^2+b^2}{3}$

នោះ $(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\ge\frac{(1+a^2+b^2)(c^2+2)}{9}$

ដោយ $(1+a^2+b^2)(c^2+1+1)\geq(a+b+c)^2$

គេបាន $(1+\frac{a^2-1}{3})(1+\frac{b^2-1}{3})(1+\frac{c^2-1}{3})\geq\frac{(a+b+c)^2}{9}$ ពិត ។

4-ចំពោះករណី ដែលត្រីធាតុ a,b,c មានតែមួយគត់ដែលធំជាង 1 សិក្សាដូច

ករណីទី1 ។

សរុបចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន :

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$ ។

លំហាត់ទី២៨ (Japan,1997)

គេយក a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

តាង $T=\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}$

យក $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$ ហើយកន្សោម T ទៅជា

$T=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(y-1)^2}{y^2+1}+\frac{(z-1)^2}{z^2+1}$ ។

បើ $x=y=z=2$ គេបាន $T=\frac{3}{5}$ ជាករណីដែលវិសមភាពក្លាយជាសមភាព ។

យើងសន្មតថាមានពីរចំនួនពិត a និង b ដែលនាំឱ្យ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{a}{x+1}+b$ ពិត

គ្រប់ $x>0$ ហើយដោយ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$ នោះដើម្បីឱ្យ $T\geq\frac{3}{5}$

លុះត្រាតែ $(\frac{a}{x+1}+b)+(\frac{a}{y+1}+b)+(\frac{a}{z+1}+b)=\frac{3}{5}$

នាំឱ្យ $a+3b=\frac{3}{5}\,(*)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយសមភាពកើតឡើងចំពោះ $x=2$ នោះ $x=2$ ជាឫសឌុប

របស់សមីការ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{a}{x+1}+b$

ឬ $(x+1)(x-1)^2-(x^2+1)(a+b+bx)=0$

តាង $f(x)=(x+1)(x-1)^2-(x^2+1)(a+b+bx)$

$x=2$ ជាឫសឌុបនៃ $f(x)=0$ នោះ $f'(2)=0$

ដោយ $f'(x)=(x-1)^2+2(x^2-1)-2x(a+b+bx)-b(x^2+1)$

នោះ $f'(2)=1+6-4(a+3b)-5b=7-4\times\frac{3}{5}-5b=0$

គេទាញបាន $b=\frac{23}{25}$ ហើយតាម (*) គេបាន $a=\frac{3}{5}-3b=-\frac{54}{25}$

គេបាន $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(x+1)}$ សមមូល $\frac{2(x-2)^2(x+7)}{25(x+1)(x^2+1)}\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(x+1)}\,(1)$

$\frac{(y-1)^2}{y^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(y+1)}\,(2)$ និង $\frac{(z-1)^2}{z^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(z+1)}\,(3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន :

$$T\geq\frac{23}{25}\times 3-\frac{54}{25}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)=\frac{69-54}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យ x,y,z,t ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+t}\right)^2+\left(\frac{t}{t+x}\right)^2\geq 1$$ ។

តាង $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{y}$, $c=\frac{t}{z}$ និង $d=\frac{x}{t}$ ដែល $abcd=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq 1$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន :

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}-\frac{1}{1+ab}=\frac{ab(a-b)^2+(1-ab)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}\geq 0$$

គេទាញ $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq\frac{1}{1+cd}=\frac{ab}{1+ab}$ (2)

បូកវិសមភាព (1) & (2) គេបាន :

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq\frac{1}{1+ab}+\frac{ab}{1+ab}=1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+t}\right)^2+\left(\frac{t}{t+x}\right)^2\geq 1$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យ a, b, c និង x, y, z ជាចំនួនពិត ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) \geq 3(bcx+cay+abz)^2$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន :

$$[x(bc)+a(cy+bz)]^2 \leq (x^2+a^2)[b^2c^2+(cy+bz)^2]$$

ឬ $(a^2+x^2)[b^2c^2+(cy+bz)^2] \geq (bcx+acy+abz)^2$

ដើម្បីស្រាយថា $4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) \geq 3(bcx+cay+abz)^2$

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $4(b^2+x^2)(c^2+z^2) \geq 3[b^2c^2+(cy+bz)^2]$

ឬ $4(b^2+x^2)(c^2+z^2) - 3[b^2c^2+(cy+bz)^2] \geq 0$

ឬ $b^2c^2+b^2z^2+c^2y^2+4y^2z^2-2bcyz-4bcyz \geq 0$

ឬ $(cy-bz)^2+(bc-2yz)^2 \geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) \geq 3(bcx+cay+abz)^2$

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យបីចំនួនពិត $a>-1\ ,\ b>-1\ ,\ c>-1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geq 2$$ ។

យក $T=\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}$

គេមាន $1+b>0$ និង $c^2\geq 0$ នោះ $1+b+c^2\geq 1+b>0$

ហើយ $(1-b)^2\geq 0$ ឬ $b\leq\frac{1+b^2}{2}$

នាំឱ្យ $1+b+c^2\leq\frac{1+b^2}{2}+1+c^2=\frac{1+b^2+2(1+c^2)}{2}$

គេទាញបាន $\frac{1+a^2}{1+b+c^2}\geq\frac{2(1+a^2)}{1+b^2+2(1+c^2)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{1+b^2}{1+c+a^2}\geq\frac{2(1+b^2)}{1+c^2+2(1+a^2)}$ (2)

និង $\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geq\frac{2(1+c^2)}{1+a^2+2(1+b^2)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$T\geq\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}$$

ដែល $x=1+a^2\ ,\ y=1+b^2\ ,\ z=1+c^2$ ។

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេបាន ៖

$$T \geq \frac{2x^2}{xy+2xz}+\frac{2y^2}{yz+2xy}+\frac{2z^2}{xz+2yz} \geq \frac{2(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}$$

ដោយ $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ នោះ $T \geq 2$

ដូចនេះ $\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\geq\frac{3}{8}$$ ។

តាង $T=\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}$

តាមវិសមភាព Holder :

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3)^3$$

យក $a_1=b_1=\frac{1}{1+a}$, $a_2=b_2=\frac{1}{1+b}$, $a_3=b_3=\frac{1}{1+c}$

ហើយ $c_1=c_2=c_3=1$ គេបាន :

$$3T^2\geq\left[\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\right]^3$$

ឬ $$T^2\geq\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\right]^3$$

ដើម្បីស្រាយថា $T\geq\frac{3}{8}$ យើងត្រូវស្រាយថា :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\right]^3\geq\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$$

ឬ $$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{3}{4}$$

គេមាន :

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}-\frac{1}{1+ab}=\frac{ab(a-b)^2+(1-ab)^2}{(1+a)^2(1+b)^2(1+ab)}\geq 0$$

គេទាញបាន $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geq\frac{1}{1+ab}$

ហើយ $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{(1+c)^2}$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{3}{4}$ ដោយ $abc=1$

គេបាន $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{(1+c)^2}-\frac{3}{4}=\frac{c}{1+c}+\frac{1}{(1+c)^2}-\frac{3}{4}=\frac{(c-1)^2}{4(1+c)}\geq 0$

គេទាញ $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{(1+c)^2}\geq\frac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\geq\frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣៣ (USAMO 2011)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$ ។

គេមាន $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$

$$2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\le 4$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\le 2$$

គេបាន $2ab+a^2+b^2+(c^2+bc)+(ab+ca)\le 2+2ab$

$$(a+b)^2+(b+c)(c+a)\le 2(ab+1)$$

គេទាញ $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}\ge \dfrac{1}{2}+\dfrac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}\ge \dfrac{1}{2}+\dfrac{(a+b)(a+c)}{2(b+c)^2}$ (2)

និង $\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge \dfrac{1}{2}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{2(c+a)^2}$ (3)

បូក (1),(2) & (3) គេបាន $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge \dfrac{3}{2}+T$

ដែល $T=\dfrac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}+\dfrac{(a+b)(a+c)}{2(b+c)^2}+\dfrac{(a+b)(b+c)}{2(c+a)^2}\ge \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2}+\dfrac{bc+1}{(b+c)^2}+\dfrac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$ ។

លំហាត់ទី៣៤ (USAMO 2004)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b និង c ។

ចូរស្រាយថា $(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ យើងនឹងស្រាយថា $x^5-x^2+3\ge x^3+2$ (*)

គេបាន $x^5-x^3-x^2+1=(x^2-1)(x^3-1)\ge 0$ ពិត

តាង $P=(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)$

តាមវិសមភាព (*) គេបាន $P\ge(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$

ដើម្បីស្រាយថា $P\ge(a+b+c)^3$ យើងគ្រាន់តែស្រាយឱ្យឃើញថា :

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3$$

ដោយ $\frac{t^3+2}{3}=1+\frac{t^3-1}{3}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរជា :

$$(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3})\ge\frac{(a+b+c)^3}{27}$$

គេមានសមភាព $(1+u)(1+v)=1+u+v+uv$

បើ u និង v ជាពីរចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នានោះផលគុណ $uv\ge 0$

ហេតុនេះ $(1+u)(1+v)\ge 1+u+v$

ចំពោះ $w\ge -1$ គេបាន $(1+u)(1+v)(1+w)\ge(1+u+v)(1+w)$

-បើ $u,v,w\ge 0$ នោះ $(1+u+v)(1+w)\ge 1+u+v+w$

គេទាញ $(1+u)(1+v)(1+w)\ge 1+u+v+w$ (**)

-បើ $u, v, w \le 0$ នោះ $(1+u+v)(1+w) \ge 1+u+v+w$

គេទាញ $(1+u)(1+v)(1+w) \ge 1+u+v+w$ (***)

ដើម្បីស្រាយថា $(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3}) \ge \frac{(a+b+c)^3}{27}$ ពិត

យើងត្រូវសិក្សាករណីដូចខាងក្រោម :

-ករណីទី១ : បើ $a,b,c \ge 1$ ឬ $a,b,c \le 1$ នោះតាម (**) និង (***)

គេអាចសរសេរ :

$$(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3}) \ge 1+\frac{a^3+b^3+c^3-3}{3}$$

$$(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3}) \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

តាមវិសមភាព Hoder គេមាន $9(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)^3$

គេទាញបាន $(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3}) \ge \frac{(a+b+c)^3}{27}$ ពិត

-ករណីទី២ : បើបីចំនួន a,b,c មានមួយតូចជាង 1 និង ពីរចំនួនទៀតធំជាង 1

សន្មតថា $c \le 1$ និង $a,b \ge 1$ នោះគេបាន :

$$(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3}) \ge 1+\frac{a^3+b^3-2}{3} = \frac{a^3+b^3+1}{3}$$

ហើយ $1+\frac{c^3-1}{3} = \frac{c^3+2}{3} = \frac{1+1+c^3}{3}$ នោះតាមវិសមភាព Hoder

$$\frac{a^3+b^3+1}{3} \cdot \frac{1+1+c^3}{3} \cdot \frac{1+1+1}{3} \ge \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

ហេតុនេះ $(1+\frac{a^3-1}{3})(1+\frac{b^3-1}{3})(1+\frac{c^3-1}{3}) \geq \frac{(a+b+c)^3}{27}$ ពិត

សរុបមក $(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geq (a+b+c)^3$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

លំហាត់ទី៣៩ (USAMO 1997)

ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c គេមានវិសមភាព :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ។

គេមាន $(a-b)(a^2-b^2)\ge 0$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b

គេបាន $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$

$$a^3+b^3+abc\ge a^2b+ab^2+abc$$

$$a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)$$

គេទាញ $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.\frac{c}{a+b+c}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}.\frac{a}{a+b+c}$ **(2)**

និង $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.\frac{b}{a+b+c}$ **(3)**

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ។

លំហាត់ទី៣៦ (USAMO 1991)

គេយក $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^m+a^n\ge m^m+n^n$ ។

យើងជ្រើសរើស $x=\dfrac{a}{m}-1$ និង $y=\dfrac{a}{n}-1$ ដោយ $a=\dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$

នោះ $x=n^n.\dfrac{\frac{n}{m}-1}{m^m+n^n}$ និង $y=m^m.\dfrac{\frac{m}{n}-1}{m^m+n^n}$

តាមវិសមភាព **Bernoullie** គេមាន $(1+x)^m\ge 1+mx$

គេបាន $(1+\dfrac{a}{m}-1)^m\ge 1+n^n.\dfrac{n-m}{m^m+n^n}$

នាំឱ្យ $a^m\ge m^m+m^mn^n.\dfrac{n-m}{m^m+n^n}$ (1)

ហើយ $(1+y)^n\ge 1+ny$

គេបាន $(1+\dfrac{a}{n}-1)^n\ge 1+m^m.\dfrac{m-n}{m^m+n^n}$

នាំឱ្យ $a^n\ge n^n+m^mn^n.\dfrac{m-n}{m^m+n^n}$ (2)

បូកវិសមភាព (1) & (2) គេបាន $a^m+a^n\ge m^m+n^n$ ពិត

ដូចនេះ $a^m+a^n\ge m^m+n^n$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យ $\mathbf{x\,;\,y\,;\,z}$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{xyz=1}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\mathbf{x^9+y^9}}{\mathbf{x^6+x^3y^3+y^6}}+\frac{\mathbf{y^9+z^9}}{\mathbf{y^6+y^3z^3+z^6}}+\frac{\mathbf{z^9+x^9}}{\mathbf{z^6+z^3x^3+x^6}}\geq \mathbf{2}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\mathbf{x^9+y^9}}{\mathbf{x^6+x^3y^3+y^6}}+\frac{\mathbf{y^9+z^9}}{\mathbf{y^6+y^3z^3+z^6}}+\frac{\mathbf{z^9+x^9}}{\mathbf{z^6+z^3x^3+x^6}}\geq \mathbf{2}$$

យើងមាន $x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$

$$x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)-2x^3y^3(x^3+y^3)$$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}=x^3+y^3-\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេមាន $x^6+x^3y^3+y^6\geq 3x^3y^3$

គេបាន $\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}\leq \dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}\geq x^3+y^3-\dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

ឬ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}\geq \dfrac{1}{3}(x^3+y^3)$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\dfrac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}\geq \dfrac{1}{3}(y^3+z^3)$ (2)

$$\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \ge \frac{1}{3}(z^3+x^3) \quad (3)$$

ធ្វើផលបូក **(1) ; (2)** និង **(3)** អង្គ និង អង្គ គេបាន :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \ge \frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេបាន $x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz = 3$ ព្រោះ $xyz=1$

ដូចនេះ $\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \ge 2$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{abc}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$1=\dfrac{ab+bc+ca}{3}\ge\sqrt[3]{(abc)^2}$ ឬ $abc\le 1$ ។

គេមាន :

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+(1-abc)}$$

ដោយ $abc\le 1$ ឬ $1-abc\ge 0$ នោះ $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}\le\dfrac{1}{3a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}\le\dfrac{1}{3b}$ (2) , $\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន :

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}$$

$$=\frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដោយ $ab+bc+ca=3$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី៣៩ (Austrian Olympiad 1989)

គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

យើងមាន $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4+2ab$

គេទាញ $2ab=(a+b)^2-4=(a+b+2)(a+b-2)$

នាំឱ្យ $\frac{ab}{a+b+2}=\frac{a+b-2}{2}$

$$\frac{ab}{a+b+2}=\frac{a+b}{2}-1 \quad (1)$$

គេមាន $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$

គេទាញ $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2\le 2(a^2+b^2)=8$

នាំឱ្យ $a+b\le 2\sqrt{2}$ ឬ $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\frac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

លំហាត់ទី៤០ (Selection test for JBMO 2007)

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;y\,;z\ge 0$ ។

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

តាង $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

គេមានឯកលក្ខណៈភាព

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\quad (i)$$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;y\,;z\ge 0$ គេមាន :

$$x+y\ge|x-y|,\ y+z\ge|y-z|,\ z+x\ge|z-x|$$

គេបាន $2(x+y+z)\ge|x-y|+|y-z|+|z-x|$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន $2(x+y+z)\ge 3\sqrt[3]{p}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមានសមភាព

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2}\quad (2)$$

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព **(1)** និង **(2)** គេទទួលបាន ៖

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq\frac{9}{2}p$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\geq\frac{9}{4}p \quad \text{(ii)}$$

តាម **(i)** និង **(ii)** គេបាន $x^3+y^3+z^3-3xyz\geq\frac{9}{4}p$

គេទាញ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\dfrac{3}{4}p$ ដោយ $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ដូចនេះ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

លំហាត់ទី៤១ (RMC 2000)

គេឱ្យ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a}{b-a+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$ ។

តាង $\begin{cases} b-a+c=x \\ a-b+c=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $a=\dfrac{y+z}{2}\,;\, b=\dfrac{z+x}{2}\,;\, c=\dfrac{x+y}{2}$

យក $T=\dfrac{a}{b-a+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}$

$$=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right]\ge\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

ព្រោះ $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\ge 2\,;\,\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\ge 2\,;\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\ge 2$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{b-a+c}+\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$ ។

លំហាត់ទី៤២ (RMC 2004)

គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c}$ ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{|a|+|b|+|c|-abc \le 4}$ ។

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេបាន :

$$\mathbf{\left(|a|+|b|+|c|\right)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)=9}$$

គេទាញ $\mathbf{|a|+|b|+|c| \le 3 \ \ (1)}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេបាន :

$$\mathbf{a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}}$$

គេទាញ $\mathbf{(abc)^2 \le \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = 1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{-1 \le abc \le 1}$

គេទាញបាន $\mathbf{-abc \ge 1 \ \ (2)}$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព $\mathbf{(1)}$ និង $\mathbf{(2)}$ គេបាន $\mathbf{|a|+|b|+|c|-abc \le 4}$ ។

លំហាត់ទី៤៣ (JBMO 2003)

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$ ។

យើងតាង $a=\frac{1}{x} ; b=\frac{1}{y} ; c=\frac{1}{z}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរ :

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq \frac{6}{x+y+z} \quad (\text{ ព្រោះ } xyz=\frac{1}{abc}=1 \text{)}$$

យើងមាន $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$ គេបាន

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

នាំឱ្យ $1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2} \geq \frac{6}{x+y+z}$

ព្រោះ $1-\frac{6}{x+y+z}+\frac{9}{(x+y+z)^2}=\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2 \geq 0$

ដូចនេះ $1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$ ។

ចំពោះ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$

យើងមាន $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$

នាំឱ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

$$\log_2 a + \log_2 b \leq 2\log_2(\frac{a+b}{2}) \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន

$$\log_2 a + \log_2 b \geq 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z \text{ ។}$$

របៀបទី១ : តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \geq 2|x+y-1| \geq 2(x+y-1) \ (1)$$

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2|y+z-1| \geq 2(y+z-1) \ (2)$$

$$\frac{(z+x-1)^2}{y} + y \geq 2|z+x-1| \geq 2(z+x-1) \ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2), (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq 3(x+y+z) - 6$$

ដោយ $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ ព្រោះ $xyz = 1$

គេបាន $2(x+y+z) \geq 6$

ឬ $2(x+y+z) - 6 \geq 0$

ឬ $3(x+y+z) - 6 \geq x+y+z$

ដូចនេះ $$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

របៀបទី២

$$T=\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}-(x+y+z)$$

ដោយប្រើវិសមភាព $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ គេបាន

$$T\ge\frac{\left[|x+y-1|+|y+z-1|+|z+x-1|\right]^2}{x+y+z}-(x+y+z)$$

$$T\ge\frac{(x+y-1+y+z-1+z+x-1)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\ge\frac{(2x+2y+2z-3)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\ge\frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ (ព្រោះ $xyz=1$)

គេទាញបាន $x+y+z-3\ge 0$ និង $x+y+z-1\ge 2$

ហេតុនេះ $T=\frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$ ។

លំហាត់ទី៤៦ (BMO 2010)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\ge 0$ ។

បង្ហាញថា :

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\ge 0$$

គេមាន

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=\frac{a^2b^2-a^2bc}{a+b}=\frac{(a^2b^2+ab^2c)-(a^2bc+ab^2c)}{a+b}$$

$$=\frac{ab^2(a+c)-abc(a+b)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc$$

គេបាន $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc \quad (1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{b^2c(c-a)}{b+c}=bc^2\frac{b+a}{b+c}-abc \quad (2)$

និង $\frac{c^2a(a-b)}{c+a}=ca^2\frac{c+b}{c+a} \quad (3)$

បូកសមភាព $(1),(2)$ និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$T=ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc$$

ដែល $T=\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}\geq 3abc$$

ឬ $$ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc\geq 0$$

ដូចនេះ $$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

គេមានសមភាព :

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

គេបាន :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}=\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

តាមវិសមភាព Bernoulli ចំពោះគ្រប់ចំនួន x និង a ដែល $x > -1$ និង $a > 1$

យើងមាន $(1+x)^a \geq 1 + ax$ ។

ហេតុនេះចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន :

$$(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}.(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

ដោយ $(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 - \cos x$ និង $(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 + \cos x$

គេបាន $(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$

គេទាញ $(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \sin x$

$$\ln(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \ln(\sin x)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x) > \ln(\sin x)$$

$$\cos x \ln(\cos x) > \sin x \ln(\sin x)$$

$$\ln(\cos x)^{\cos x} > \ln(\sin x)^{\sin x}$$

ដូចនេះ $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy>[(a-c)^2+(b-d)^2+(x+y)]^2\geq(x+y)^2$

ឬ $4xy>x^2+2xy+y^2$

ឬ $(x-y)^2<0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x<0$ និង $y<0$ នាំឱ្យ$a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

កំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម E

គេមាន $\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-ab}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

គេបាន $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ ឬ $-\frac{ab}{a+b}\geq-\frac{\sqrt{ab}}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}\geq a-\frac{\sqrt{ab}}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c}\geq b-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a}\geq c-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព $(1); (2) \& (3)$ គេទទួលបាន :

$$E\geq a+b+c-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=a+b+c-\frac{1}{2}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន :

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

គេទាញ $E\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ E គឺ $E_{min}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \ge 2$) ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \ge 1998$ ។

គេមាន $\dfrac{1}{x_1+1998}+\dfrac{1}{x_2+1998}+....+\dfrac{1}{x_n+1998}=\dfrac{1}{1998}$

ឬ $\dfrac{1998}{x_1+1998}+\dfrac{1998}{x_2+1998}+....+\dfrac{1998}{x_n+1998}=1$

តាង $y_i=\dfrac{1998}{x_i+1}$ គេបាន $y_1+y_2+....+y_n=1$

គេទាញ $1-y_i=\sum\limits_{j\ne i}(y_i)$ ដែល $1\le i\le n$ និង $1\le j\le n$

តាម $AM-GM$ គេមាន $\sum\limits_{j\ne i}(y_i)\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\prod\limits_{j\ne i}(y_i)}$

គេបាន $1-y_i\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\prod\limits_{j\ne i}(y_i)}$

គេទាញ $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-y_i)\ge (n-1)^n\prod\limits_{i=1}^{n}(y_i)$ ឬ $\prod\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1-y_i}{y_i})\ge (n-1)^n$

តែ $\dfrac{1-y_i}{y_i}=\dfrac{x_i}{1998}$ នោះ $\dfrac{x_1x_2...x_n}{1998^n}\ge (n-1)^n$

ដូចនេះ $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\ge 1998$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = x + y + z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \geq \frac{27}{2xyz}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \geq \frac{27}{2xyz}$

តាង $T = \frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2}$

ឬ $T = \frac{(x+y)^2}{x+y+z^2(x+y)} + \frac{(y+z)^2}{y+z+x^2(y+z)} + \frac{(z+x)^2}{z+x+y^2(z+x)}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$\frac{a_1^{\ 2}}{b_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{b_2} + \frac{a_3^{\ 2}}{b_3} + ... + \frac{a_n^{\ 2}}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$$

គេបាន :

$$T \geq \frac{[(x+y)+(y+z)+(z+x)]^2}{2(x+y+z)+z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)}$$

$$T \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2xyz+z^2x+z^2y+x^2y+x^2z+y^2z+y^2x}$$

$$T \geq \frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$(x+y)+(y+z)+(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$2(x+y+z)\ \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$8(x+y+z)^3\geq 27(x+y)(y+z)(z+x)$$

គេទាញ $\frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{27}{2(x+y+z)}=\frac{27}{2xyz}$

នាំឱ្យ $T\geq\frac{27}{2xyz}$

ដូចនេះ $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\geq\frac{27}{2xyz}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ចូរបង្ហាញថាបើ $abc = 8$ និង $a,b,c > 0$ នោះគេបាន :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

តាង $T = \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$1+a^3 = (1+a)(1-a+a^2) \leq \left(\frac{1+a+1-a+a^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+a^2}{2}\right)^2$$

គេទាញ $\sqrt{1+a^3} \leq \frac{a^2+2}{2}$ ។

ហេតុនេះ $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \geq \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} \geq \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \quad (3)$$

ប្តូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$T = \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)}$$

$$= \frac{4[a^2(c^2+2)+b^2(a^2+2)+c^2(b^2+2)]}{(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)}$$

$$= \frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+8}$$

ដោយ $abc = 8$ នោះគេបាន ៖

$$T \geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+36} = \frac{2t}{t+36}$$

ដែល $t = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$t \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} + 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 72$ (ព្រោះ $abc = 8$)

គេបាន $1+\frac{36}{t} \leq 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ឬ $\frac{t+36}{t} \leq \frac{3}{2}$ នាំឱ្យ $\frac{t}{t+36} \geq \frac{2}{3}$

ហេតុនេះ $T \geq \frac{2t}{t+36} \geq \frac{4}{3}$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ហើយ មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$

តាង $\sum = \frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B}$

$$= \frac{(a+b)^2}{(a+b)\cos C} + \frac{(b+c)^2}{(b+c)\cos A} + \frac{(c+a)^2}{(c+a)\cos B}$$

តាមវិសមភាព $\frac{{x_1}^2}{y_1} + \frac{{x_2}^2}{y_2} + \dots + \frac{{x_n}^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$

គេបាន $\sum \geq \frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B}$

$$\sum \geq \frac{4(a+b+c)^2}{(b\cos C + c\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (a\cos B + b\cos A)}$$

$$\sum \geq \frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c} = 4(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឱ្យ $x , y , z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}+\dfrac{y^3}{(1-y)^2}+\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\ge\dfrac{1}{4}$ ។

ស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}+\dfrac{y^3}{(1-y)^2}+\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\ge\dfrac{1}{4}$

គេពិនិត្យ
$$\frac{x^3}{(1-x)^2}=\frac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$$
$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}$$
$$=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$
$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\dfrac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}\ge 0$ នោះ $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}\ge x-\dfrac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{y^3}{(1-y)^2}\ge y-\dfrac{1}{4}$ (2) និង $\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\ge z-\dfrac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge x+y+z-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។

បើគេដឹងថា $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$

គេមាន $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{cd}+\frac{d^2}{ad}$

$$a+b+c+d>\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da}$$

នាំឱ្យ $ab+bc+cd+da>a+b+c$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}=\frac{(bc)^2}{abc^2}+\frac{(cd)^2}{bcd^2}+\frac{(ad)^2}{a^2cd}+\frac{(ab)^2}{ab^2d}$

$$=\frac{(bc)^2}{\frac{c}{d}}+\frac{(cd)^2}{\frac{d}{a}}+\frac{(ad)^2}{\frac{a}{b}}+\frac{(ab)^2}{\frac{b}{c}}$$

$$\ge\frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}} \qquad (*)$$

តាម (1) គេបាន $(bc+cd+da+ab)^2>(a+b+c+d)^2$ (2)

តាមសម្មតិកម្ម $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$

គេទាញ $$\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > \frac{1}{a+b+c+d} \quad (3)$$

គុណវិសមភាព **(2)** និង **(3)** អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > a+b+c+d \quad (**)$$

តាម **(*)** និង **(**)** គេបាន $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} > a+b+c+d$

ដូចនេះ $a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

លំហាត់ទី៤៧ (Czech and Slovak Republics 2005)

គេយក $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)}+\dfrac{b}{(b+1)(c+1)}+\dfrac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\dfrac{3}{4}$ ។

តាង $T=\dfrac{a}{(a+1)(b+1)}+\dfrac{b}{(b+1)(c+1)}+\dfrac{c}{(c+1)(a+1)}$

$$=\frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{1+a+b+c+ab+bc+ca+abc}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

$$=1-\frac{2}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$1+1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 8\sqrt[8]{a^3b^3c^3}=8$$

គេទាញ $\dfrac{1}{2+a+b+c+ab+bc+ca}\le\dfrac{1}{8}$ នាំឱ្យ $T\ge 1-\dfrac{2}{8}=\dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)}+\dfrac{b}{(b+1)(c+1)}+\dfrac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\dfrac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៩៨ (APMO 1998)

គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

វិសមភាពនេះសមមូល :

$$1+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a})+\frac{abc}{abc} \geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

តាង $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ គេបាន :

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{z^3}+1 \geq 3\frac{x^2}{yz} \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^3}{x^3}+1 \geq 3\frac{y^2}{zx} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{y^3}+1 \geq 3\frac{z^2}{xy} \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq 6\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}.\frac{y^3}{z^3}.\frac{z^3}{x^3}.\frac{x^3}{z^3}.\frac{z^3}{y^3}.\frac{y^3}{x^3}} = 6$$

ឬ $\frac{1}{2}(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}) \geq 3 \quad (4)$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) និង (4) គេបាន :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\right)\geq 3\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right)=\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

គេទាញ $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\geq\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$ ពិត

ដូចនេះ $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

លំហាត់ទី៩៩ (Romania 2002)

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y , z នៃចន្លោះ $(0,\frac{\pi}{2})$

គេយក $a=\cos^2 x , b=\cos^2 y , c=\cos^2 z$

វិសមភាពសមមូល $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$

ដោយ $\forall z\in(0,\frac{\pi}{2})$ គេមាន $\cos z<1$ និង $\sin z<1$

គេទាញ $\cos x\cos y\cos z<\cos x\cos y$ និង $\sin x\sin y\sin z<\sin x\sin y$

(ព្រោះ $\cos x\cos y>0$; $\sin x\sin y>0$)

នាំឱ្យ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos(x-y)$$

ដោយ $\cos(x-y)\le 1$ នោះ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$ ។

លំហាត់ទី៦០ (Poland 2006)

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=abc$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\dfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\dfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$ ។

គេមាន $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

តាង $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{1}{b}$, $z=\dfrac{1}{c}$ នោះ $x+y+z=1$ ហើយវិសមភាពសមមូល

$\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\dfrac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\dfrac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq 1$ ។

តាមវិសមភាព Tchebyshev គេមាន $\dfrac{x^4+y^4}{2}\geq\dfrac{x^3+y^3}{2}.\dfrac{x+y}{2}$

គេទាញ $\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\geq\dfrac{x+y}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\dfrac{y^4+z^4}{y^3+z^3}\geq\dfrac{y+z}{2}$ (2) និង $\dfrac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq\dfrac{z+x}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\dfrac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\dfrac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq x+y+z=1$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦១ (Kazakhstan 2008)

គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$ ។

តាង $x=\frac{a}{b}$; $y=\frac{b}{c}$; $z=\frac{c}{a}$ នោះ $xyz=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

តាង $T=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន $T\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$$

គេទាញបាន $T\ge\frac{3}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦២ (Korea 2000)

ចំនួនពិត $a, , b , c , x , y , z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$ ។

ដោយ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

គេបាន $(b-c)((z-y) = bz+cy-by-cz \le 0$ ឬ $bz+cy \le by+cz$

គេទាញ $(by+cz)(bz+cy) \le (by+cz)^2 \le 2(b^2y^2+c^2z^2)$

ហេតុនេះ $\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \ge \frac{a^2x^2}{2(b^2y^2+c^2z^2)} = \frac{1}{2}.\frac{X}{Y+Z}$ (1)

ដែល $X = a^2x^2$, $Y = b^2y^2$, $Z = c^2z^2$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \ge \frac{1}{2}.\frac{Y}{Z+X}$ (2) , $\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{1}{2}.\frac{Z}{X+Y}$ (3)

តាង $T = \frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$

គេបាន $T \ge \frac{1}{2}(\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y})$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X) \ge 3\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$$

ឬ $X+Y+Z \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$ (i)

ហើយ $\dfrac{1}{Y+Z}+\dfrac{1}{Z+X}+\dfrac{1}{X+Y}\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}}$ **(ii)**

គុណវិសមភាព **(i)** និង **(ii)** អង្គ និង អង្គ គេបាន :

$$\frac{X+Y+Z}{Y+Z}+\frac{X+Y+Z}{Z+X}+\frac{X+Y+Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+1+\frac{Y}{Z+X}+1+\frac{Z}{X+Y}+1\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $T\ge\dfrac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\frac{3}{4}$$ ។

លំហាត់ទី៦៣ (Ireland 2002)

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$ ដែល $0<x<1$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ ហើយ $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0$ ចំពោះ $0<x<1$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Jensen ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ គេបាន

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge 3\,f(\frac{x+y+z}{3})$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{x+y+z}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}$

គេទាញ $f(\frac{x+y+z}{3})\ge f(\sqrt[3]{xyz})$ ហេតុនេះ $f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f(\sqrt[3]{xyz})$

ដូចនេះ $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\ge\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$ ។

លំហាត់ទី៦៤ (IMO 2001)

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $\mathbf{a , b , c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ដែល $x>0$

គេបាន $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ និង $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x^5}}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen គ្រប់ $a , b , c>0$ គេបាន

$$\frac{af(x)+bf(y)+cf(z)}{a+b+c}\ge f\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right)$$

ដោយ $x=a^2+8bc$, $y=b^2+8ca$, $z=c^2+8ab$ គេបាន :

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}}{a+b+c}\ge\sqrt{\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3+24abc}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}}\quad (i)$$

គេមាន $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases}$$

នាំឱ្យ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$

គេទាញបាន $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$

ឬ $\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc} \geq 1 \;\; (ii)$

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦៩ (Bulgaria 2007)

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$ca+c+a\geq 3\sqrt[3]{c^2a^2}\Rightarrow ca+c+a+1\geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

$$\Rightarrow (a+1)(c+1)\ \geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

គេទាញបាន $\dfrac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}\geq\dfrac{(b+1)^2}{c+1}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}\geq\frac{(c+1)^2}{a+1}\ (2)\quad,\quad\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq\frac{(a+1)^2}{b+1}\ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

ព្រោះ $\dfrac{(b+1)^2}{c+1}+\dfrac{(c+1)^2}{a+1}+\dfrac{(a+1)^2}{b+1}\geq\dfrac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3}=a+b+c+3$ ។

លំហាត់ទី៦៦ (APMO 2007)

គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$$ ។

គេមាន $$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}=\frac{x^2-(y+z)x+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y+z)x}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$$

$$=\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{2}}$$

ដោយ $(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq 2(y+z)\Rightarrow\frac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{2}}\geq\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$

គេទាញ $$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\geq\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2}\quad(2)$$

$$\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$S\geq\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

ដែល $S=\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$ ។

ឧបមាថា $x\ge y\ge z$ គេបាន $\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\ge 0$

ហើយ

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}=(y-z)\left[\frac{x-z}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{x-y}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

ដោយ $x-z\ge x-y\ge 0$ គេទាញ :

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge(y-z)\left[\frac{x-y}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{x-y}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}=(y-z)(x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

ដោយ $y^2(z+x)=y^2z+y^2z\ge yz^2+z^2x=z^2(x+y)$

គេទាញ $\dfrac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\dfrac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\ge 0$ ហើយ $(y-z)(x-y)\ge 0$

គេទាញ $\dfrac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 0$ នាំឱ្យ $S\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$

ដូចនេះ $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1$ ។

លំហាត់ទី៦៧ (Baltic 2008)

បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=3}$

នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$ ។

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេបាន :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{6+a+b+c+a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}$$

ព្រោះ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=3}$ ។

គេមាន $\mathbf{(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9\Rightarrow a+b+c\leq 3}$

ឬ $\mathbf{9+a+b+c\leq 12\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}}$

ដូចនេះ $$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$ ។

លំហាត់ទី៦៨ (Canada 2008)

គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$

គេមាន $1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2bc}{1-b-c+bc}=\frac{2bc}{(1-c)(1-b)}=\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\ (1)$

ដូចគ្នាដែរ $1-\frac{b-ca}{b+ca}=\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}\ (2)$

និង $1-\frac{c-ab}{c+ab}=\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\ (3)$

បូកវិសមភាព $(1) , (2) , (3)$ គេបាន :

$$3-(\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab})=\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

ឧបមាថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ ពិត

គេទាញ $3-\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]\le\frac{3}{2}$

ឬ $\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]\ge\frac{3}{2}$

សមមូល $4[bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)]\ge 3(a+b)(b+c)(c+a)$

សមមូល $ab+bc+ca\ge 9abc$ ។

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$\mathbf{a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}}$ និង $\mathbf{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}}$

គេទាញ $\mathbf{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge 9}$

ឬ $\mathbf{(a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc}$

ដោយ $\mathbf{a+b+c=1}$ នោះ $\mathbf{ab+bc+ca \ge 9abc}$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \le \frac{3}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៦៩ (Lithuania 2006)

គេឱ្យ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$a^2+bc\ge 2\sqrt{a^2bc}=2\sqrt{ab}.\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{b^2+ca}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{bc}.}.\frac{1}{\sqrt{ca}}\quad(2)\ ;\quad\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}})$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន

$$(\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}})^2\le(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab})$$

ឬ $\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

លំហាត់ទី៧០ (USAMO 1991)

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

$$S = \frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}$$

ចូរបង្ហាញថា $S \geq \frac{a+b+c+d}{4}$ ។

បង្ហាញថា $S \geq \frac{a+b+c+d}{4}$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

គុណវិសមភាពនឹង a^2+b^2 គេបាន $(a+b)^2(a^2+b^2) \leq 2(a^2+b^2)^2$

ដោយ $(a^2+b^2)^2 \leq 2(a^4+b^4)$ នោះ $(a+b)^2(a^2+b^2) \leq 4(a^4+b^4)$

គេទាញ $\frac{a^4+b^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{a+b}{4}$

គេមាន $a^4+b^4 = 2a^4-(a^4-b^4) = 2a^4-(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

គេបាន $\frac{2a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} - (a-b) \geq \frac{a+b}{4}$

ឬ $\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{a+b}{8} + \frac{a-b}{2} \quad (*)$

តាម (*) គេទាញបាន $S \geq \frac{2(a+b+c+d)}{8} + \frac{(a-b)+(b-c)+(c-a)}{2}$

ដូចនេះ $S \geq \frac{a+b+c+d}{4}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n$ ហើយគេតាង

$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \le \left(\frac{n+S}{n}\right)^n = \left(1+\frac{S}{n}\right)^n$$

តាមទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$\left(1+\frac{S}{n}\right)^n = 1 + S + C_n^2.\frac{S^2}{n^2} + C_n^3.\frac{S^3}{n^3} + ... + C_n^n\frac{S^n}{n^n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{S^k}{n^k}$$

ដោយ :

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)....(n-1)n}{n^k}.\frac{1}{k!}$$

$$= (1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{k-2}{n}).....(1-\frac{1}{n}).1.\frac{1}{k!} \le \frac{1}{k!}$$

គេបាន $\left(1+\frac{S}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{S^k}{k!}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$

លំហាត់ទី៧២ (Turkey National Olympiad 2010)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 a_2 a_3 .... a_n = 1$ ចូរបង្ហាញថា :

$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ ។

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេមាន

$$\frac{x}{x+1} \ge \frac{x}{\sqrt{x^4 + 3}} \Leftrightarrow x^4 + 3 \ge (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \ge 0$$

ដោយ $(x-1)^2 \ge 0$ និង $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

នាំឱ្យ $(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \ge 0$ ពិតគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ហេតុនេះ $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}}$ (1)

ជាបន្តទៀតយើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1}$ ។

ឧបមាថា $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1}$ ពិត

សមមូល $\sum_{i=1}^{n} (\frac{a_i + 1}{2a_i} - \frac{1}{2}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} \ge 2 \sum_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{a_i + 1})$

សមមូល $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + 1}{2a_i} - \frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} \ge 2n - \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{a_i + 1}$

សម្មូល $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i}\geq\frac{5n}{2}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ចំពោះ $a_1,a_2,...,a_n>0$ គេមាន :

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})\geq 2n\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}.\frac{2}{a_i+1})}=2n$$

និង $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i}\geq\frac{n}{2}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=\frac{n}{2}$ (ព្រោះ $a_1a_2a_3....a_n=1$)

គេទាញបាន $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i}\geq 2n+\frac{n}{2}=\frac{5n}{2}$ ពិត

គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{{a_i}^4+3}}$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{{a_i}^4+3}}\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ។

លំហាត់ទី៧៣ (IMO Shortlist 2009)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$ ។

គេមាន $(2a+b+c)^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2$

$$=4a^2+4ab+4ac+4bc+(b-c)^2$$

$$=4(a+b)(a+c)+(b-c)^2$$

ដោយ $(b-c)^2\ge 0$ នោះ $(2a+b+c)^2\ge 4(a+b)(a+c)$

គេទាញ $\frac{1}{(2a+b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(a+c)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{1}{(a+2b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(b+c)}$ (2)

និង $\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{1}{4(b+c)(a+c)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$$S\le\frac{1}{4(a+b)(a+c)}+\frac{1}{4(a+b)(b+c)}+\frac{1}{4(b+c)(a+c)}$$

$$S\le\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$

គេទាញ $ab+bc+ac=abc(a+b+c)$

នាំឱ្យ $(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc(a+b-c)^2$

ដោយ $(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge 9abc$

គេទាញ $abc(a+b+c)^2\ge 9abc$ នោះ $a+b+c\ge 3$

លំហាត់ទី៧៤ (Turkey Team Selection Tests 2008)

សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ ។

តាង u, v, w ជាឫសរបស់សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ ។

គេបាន $\begin{cases} u+v+w=a \\ uv+vw+wu=b \\ uvw=c \end{cases}$

ដោយ $u>0, v>0, w>0$ នោះ $a>0, b>0, c>0$

គេមាន $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b} = \frac{b^2+ab-2ac+b-3c}{b^2+2ab+3a}$

$$= \frac{3b^2+3ab-6ac+3b-9c}{3(b^2+2ab+3b)}$$

$$= \frac{(b^2+2ab+3b)+(2b^2+ab-6ac-9c)}{3(b^2+2ab+3b)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2b^2+ab-6ac-9c}{3(b^2+2ab+3b)}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

$$a = u + v + w \ge 3\sqrt[3]{uvw}$$

និង $b = uv + vw + wu \ge 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2}$

គេបាន $ab \ge 9uvw = 9c$ ឬ $ab - 9c \ge 0 \quad (*)$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$$\frac{u^2v^2 + v^2w^2}{2} \ge uv^2w \quad (1) \ , \ \frac{v^2w^2 + u^2w^2}{2} \ge uvw^2 \quad (2)$$

$$\frac{u^2w^2 + u^2v^2}{2} \ge u^2vw \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន ៖

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \ge uvw(u + v + w)$$

$$(uv + vw + wu)^2 \ge 3uvw(u + v + w)$$

ឬ $b^2 \ge 3ac$ ឬ $2b^2 - 6ac \ge 0 \quad (**)$

បូកវិសមភាព $(*)$ & $(**)$ គេបាន $2b^2 + ab - 6ac - 9c \ge 0$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)} \ge \dfrac{1}{3}$ ឬ $\dfrac{1 + a + b + c}{3 + 2a + b} - \dfrac{c}{b} \ge \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\dfrac{1 + a + b + c}{3 + 2a + b} - \dfrac{c}{b}$ គឺ $\dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៧៥ (Turkey Team Selection Tests 2010)

ចូរស្រាយថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$ គេបាន :

$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព $\text{AM}-\text{GM}$ គេមាន :

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2-ab+b^2)}{2}\ge\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$$

ឬ $\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}\ge\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$

គេបាន $\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេបាន ៖

$$\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}\le\frac{\sqrt{3(6a^2+6b^2+6c^2-2ab-2bc-2ca)}}{2}$$

គេទាញបាន ៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}\quad(2)$$

យើងនឹងស្រាយថា ៖

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}$$

សមមូល

$$a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{\frac{(a+b+c)^2[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}{6}}$$

$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{\sqrt{2(a+b+c)^2[9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)}}{6}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\ ,\ \forall x,y\ge 0$

$$x=2(a+b+c)^2\ ,\ y=9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)$$

ហើយ $x+y=11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca$

នោះគេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{12}$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

ឬ $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge 0$ ពិត

ហេតុនេះគេបាន

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \ge \frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2} \quad (3)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ,(2) និង (3) គេទាញបាន :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c$ ។

លំហាត់ទី៧៦ (Turkey National Olympiad 2005)

បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ ។

តាង $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a=\frac{y+z}{2} \\ b=\frac{z+x}{2} \\ c=\frac{x+y}{2} \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}$ (1)

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេបាន :

$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេទាញ $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

ឬ $r^2=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)}=\frac{xyz}{4(x+y+z)}$

គេទាញ $\frac{1}{4r^2}=\frac{x+y+z}{xyz}=\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}$ (2)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$\mathbf{y+z \ge 2\sqrt{yz}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{\frac{4}{(y+z)^2} \le \frac{1}{yz}}$

ដូចគ្នាដែរ $\mathbf{\frac{4}{(z+x)^2} \le \frac{1}{zx}}$ និង $\mathbf{\frac{4}{(x+y)^2} \le \frac{1}{xy}}$

គេបាន $\mathbf{\frac{4}{(y+z)^2} + \frac{4}{(z+x)^2} + \frac{4}{(x+y)^2} \le \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}}$ **(3)**

តាមទំនាក់ទំនង **(1) , (2) & (3)** គេទាញបាន $\mathbf{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}}$ ។

លំហាត់ទី៧៧ (Vietnam Team Selection Tests 2010)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\le\frac{8}{9}$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

គេបាន $ab+bc+ca\le 16abc(a+b+c)\ \ (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2}+\frac{c^2a^2+a^2b^2}{2}\ge ab^2c+abc^2+a^2bc$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab^2c+abc^2+a^2bc=abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab^2c+2abc^2+2a^2bc=2abc(a+b+c)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\ \ (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន

$$(ab+bc+ca)^2\ge\frac{3}{16}(ab+bc+ca)$$

ឬ $ab+bc+ca\ge\frac{3}{16}\ \ (3)$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(a+b)+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c})+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c})\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

ឬ $(a+b+\sqrt{2a+2c})^3 \geq \frac{27}{2}(a+b)(a+c)$

គេទាញបាន $\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3} \leq \frac{2}{27}.\frac{1}{(a+b)(a+c)}$ (4)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3} \leq \frac{2}{27}.\frac{1}{(a+b)(b+c)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \leq \frac{2}{27}.\frac{1}{(c+a)(b+c)} \quad (6)$$

តាង

$$T=\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}$$

បូកវិសមភាព $(4),(5),(6)$ គេបាន

$$T \leq \frac{2}{27}.\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេមាន

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc \quad (7)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc \quad (8)$$

តាម **(7)** និង **(8)** គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

នាំឱ្យ $\dfrac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\dfrac{9}{8}.\dfrac{1}{ab+bc+ca}=\dfrac{9}{8}.\dfrac{16}{3}=6$

ព្រោះ $ab+bc+ca\geq\dfrac{3}{16}$ ។

គេទាញបាន $T\leq\dfrac{2}{27}\times2\times6=\dfrac{8}{9}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq\frac{8}{9}$$

លំហាត់ទី៧៨

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{ab}{1-c^2}+\dfrac{bc}{1-a^2}+\dfrac{ca}{1-b^2}\le\dfrac{3}{8}$ ។

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $1-c^2=(a+b+c)^2-c^2$

$$=(a+b)(a+b+2c)$$

$$=(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)$$

គេបាន $\dfrac{ab}{1-c^2}=\dfrac{ab}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន :

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+c)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{a+b+2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{1+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

គេទាញ $\dfrac{ab}{1-c^2}\le\dfrac{ab(1+c)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\dfrac{bc}{1-a^2}\le\dfrac{bc(1+a)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (2)

និង $\dfrac{ac}{1-b^2}\le\dfrac{ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន :

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ac}{1-b^2}\le\frac{ab(1+c)+bc(1+a)+ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ac}{1-b^2}\le\frac{ab+bc+ca+3abc}{4(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(4)$$

គេមាន $(a+b)(b+c)(c+a)=(1-a)(1-b)(1-c)$

$$(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$$

$$=ab+bc+ca-abc$$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)=ab+bc+ca-abc$

ឬ $(a+b)(b+c)(c+a)+4abc=ab+bc+ca+3abc$

ឬ $1+\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

ដោយ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

គេបាន $\dfrac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le 1+\dfrac{4}{8}=\dfrac{3}{2}\quad(5)$

តាម (4) & (5) គេបាន $\dfrac{ab}{1-c^2}+\dfrac{bc}{1-a^2}+\dfrac{ca}{1-b^2}\le\dfrac{3}{8}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\dfrac{ab}{1-c^2}+\dfrac{bc}{1-a^2}+\dfrac{ca}{1-b^2}\le\dfrac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៧៩ (Indonesia Team Selection test 2010)

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន $\frac{a^3}{x^2}+x+x\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2}.x.x}$

គេទាញ $\frac{a^3}{x^2}\geq 3a-2x \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{y^2}\geq 3b-2y \quad (2)$ **និង** $\frac{c^3}{z^2}\geq 3c-2z \quad (3)$

បូកវិសមភាព (1), (2) & (3) គេបាន :

$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq 3(a+b+c)-2(x+y+z)=a+b+c$ **ពិត**

ដូចនេះ $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឱ្យ $a\ ,b\ ,c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$ ។

គេមាន $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b+c\geq 2\sqrt{bc}$

គេទាញ $bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ នាំឱ្យ $-3bc(b+c)\geq-\frac{3}{4}(b+c)^3$

គេបាន $b^3+c^3\geq(b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3$

គេទាញ $b+c\leq\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

ឬ $a+b+c\leq a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

នាំឱ្យ $$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}\geq 1+\frac{a}{b+c}\quad(1)$$

ដូចគ្នាដែរ $$\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}\geq 1+\frac{b}{c+a}\quad(2)$$

និង $$\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq 1+\frac{c}{a+b}\quad(3)$$

ដោយបូកទំនាក់ទំនង $(1),(2),(3)$ គេបាន :

$$T \geq 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$ ដែល

$$T=\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\frac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\frac{n+p-m}{2} \\ b=\frac{m-n+p}{2} \\ c=\frac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព**AM – GM** គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\ge 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\ge 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\ge 2$$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \ge\ \frac{1}{2}\left(2+2+2-3\right)=\frac{3}{2}$

គេទាញ $T\ge 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១

គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\ge\frac{3}{8}$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{a^3}{(b+c)^3}\ge\frac{3a}{4(b+c)}$$

ឬ $\frac{a^3}{(b+c)^3}\ge\frac{3a}{4(b+c)}-\frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{(c+a)^3}\ge\frac{3b}{4(c+a)}-\frac{1}{4}$ (2)

និង $\frac{c^3}{(a+b)^3}\ge\frac{3c}{4(a+b)}-\frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1), (2) & (3) គេបាន :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-\frac{3}{4}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{3}{4}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})-\frac{3}{4}\ge\frac{3}{8}$

ឬ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\dfrac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\dfrac{n+p-m}{2} \\ b=\dfrac{m-n+p}{2} \\ c=\dfrac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព$AM-GM$ គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ \geq\ \dfrac{1}{2}(2+2+2-3)=\dfrac{3}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី៨២ (IMO Longlist 1992)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c គេកំណត់តាង $A = \dfrac{a+b+c}{3}$

$G = \sqrt[3]{abc}$ និង $H = \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\dfrac{A}{G}\right)^3 \geq \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}$?

ឧបមាថា $\left(\dfrac{A}{G}\right)^3 \geq \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}$ ពិត

សមមូល $A^3 \geq \dfrac{1}{4}G^3 + \dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}.G^3$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq \frac{1}{4}abc + \frac{3}{4}.\frac{\dfrac{a+b+c}{3}}{\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}}.abc$$

$$(a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}abc + \frac{9abc}{4}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

ឬ $4(a+b+c)^3 \geq 27abc + 9(a+b+c)(ab+bc+ca)$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ យើងបាន

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ នាំឱ្យ $(a+b+c)^3 \geq 27abc \quad (1)$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\geq ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន :

$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

$3(a+b+c)^3\geq 9(ab+bc+ca)$ (2)

បូកវិសមភាព (1) & (2) គេបាន :

$4(a+b+c)^3\geq 27abc+9(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{A}{G}\right)^3\geq\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$ ។

លំហាត់ទី៨៣ (IMO 1969)

គេឱ្យចំនួនពិត $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0, x_2 > 0$

$x_1y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \quad (*)$$

តាង $a = x_1y_1 - z_1^2 > 0$; $b = x_2y_2 - z_2^2 > 0$

និង $c = (x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$

ដោយ $x_1 > 0$ និង $x_2 > 0$ នោះ $y_1 = \dfrac{a + z_1^2}{x_1} > 0$ និង $y_2 > 0$

$$c = (x_1y_1 - z_1^2) + (x_2y_2 - z_2^2) + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$

$$c = a + b + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$

ដោយ $a = x_1y_1 - z_1^2$ នោះ $x_1 = \dfrac{a + z_1^2}{y_1}$

និង $b = x_2y_2 - z_2^2$ នោះ $x_2 = \dfrac{b + z_2^2}{y_2}$

គេបាន $c = a + b + y_2\left(\dfrac{a + z_1^2}{y_1}\right) + y_1\left(\dfrac{b + z_2^2}{y_2}\right) - 2z_1z_2$

$$= a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b + \frac{y_2}{y_1}z_1^2 - 2z_1z_2 + \frac{y_1}{y_2}z_2^2$$

$$= a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b + \left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\ z_1 - \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\ z_2\right)^2$$

ដោយ $\left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}z_1 - \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}z_2\right)^2 \geq 0$ នោះគេទាញបាន :

$c \geq a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b$ ដោយ $\frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b \geq 2\sqrt{ab}$

នោះ $c \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ **(1)**

យើងឧបមាថាវិសមភាព **(*)** ពិតពោលគឺ $\frac{8}{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ពិត

គេបាន $c \geq \frac{8ab}{a+b}$ ដោយ $c \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (តាមវិសមភាព **(1)**)

យើងនឹងស្រាយថា $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq \frac{8ab}{a+b}$

សមមូល $(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 8ab$ ។ តាមវិសមភាព **AM – GM** :

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ហើយ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab}$

នោះ $(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 8ab$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - {z_1}^2} + \frac{1}{x_2y_2 - {z_2}^2}$$

វិសមភាពនេះក្លាយសមភាពលុះត្រាតែ :

$z_1\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} = z_2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$ ឬ $z_1y_2 = z_2y_1$ និង $\frac{y_2}{y_1}a = \frac{y_1}{y_2}b$ ។

លំហាត់ទី៨២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $\sqrt[3]{ab}$ គេបាន :

$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\le\sqrt[3]{2(a+b)^2}$

តាង $x=\sqrt[3]{a}$ និង $y=\sqrt[3]{b}$

គេបាន $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ (*)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge3x^4y^2$ និង $y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge3x^2y^4$

បូកវិសមភាពទាំងពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$x^6+4x^3y^3+y^6\ge3x^4y^2+3x^2y^4$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង x^6+y^6 គេបាន

$2(x^6+2x^3y^3+y^6)\ge x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$

$$2(x^3+y^3)^2\ge(x^2+y^2)^3$$

គេទាញ $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ នាំឱ្យ (*) ពិត ។

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$ គ្រប់ $a>0\,;b>0$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz យើងបាន:

$(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C})^2\le 3(\cos A+\cos B+\cos C)\quad(1)$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ព្រោះ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ ។

ដោយ **B** និង **C** ជាមុំស្រួចនោះ $0<B<\frac{\pi}{2}$; $0<C<\frac{\pi}{2}$

គេទាញ $-\frac{\pi}{4}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{4}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

ហេតុនេះ $T\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin\frac{A}{2})^2\le\frac{3}{2}$

ឬ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}\quad(2)$

តាមទំនាក់ទំនង **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន:

$(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C})^2\le\frac{9}{2}$

ដូចនេះ $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឱ្យ $x\,;\ y\,;z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$ ។

យើងមាន $(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2$ ដោយ $x^2+y^2\ge 2xy$

គេទាញ $(x+1)^2+y^2+1\ge 2(xy+x+1)$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{xy+x+1}$

គេមាន $xyz=1$ នោះគេអាចយក $x=\dfrac{b}{a}\,;y=\dfrac{c}{b}\,,\ z=\dfrac{a}{c}$

ដែល $a>0\,;b>0\,;c>0$ ។

គេបាន $xy+x+1=\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{a}+1=\dfrac{a+b+c}{a}$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{a+b+c}\quad(1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{b}{a+b+c}\quad(2)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{c}{a+b+c}\quad(3)$$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព $(1)\,;\ (2)$ និង (3) គេបាន :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៨៦ (USAMO 1991)

គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$a(b^2 - \sqrt{b}) + b(c^2 - \sqrt{c}) + c(a^2 - \sqrt{a}) \geq 0$ ។

ដោយ $abc = 1$ នោះគេអាចតាង $a = \dfrac{x^2}{y^2}$; $b = \dfrac{y^2}{z^2}$; $c = \dfrac{z^2}{x^2}$

ដែល $x > 0 ; y > 0 ; z > 0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូល :

$$\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y^4}{z^4} - \frac{y}{z}\right) + \frac{y^2}{z^2}\left(\frac{z^4}{x^4} - \frac{z}{x}\right) + \frac{z^2}{x^2}\left(\frac{x^4}{y^4} - \frac{x}{y}\right) \geq 0$$

$$\frac{x^2y^2}{z^4} - \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2z^2}{x^4} - \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2x^2}{y^4} - \frac{z^2}{xy} \geq 0$$

$$\frac{2x^2y^2}{z^4} - \frac{2x^2}{yz} + \frac{2y^2z^2}{x^4} - \frac{2y^2}{zx} + \frac{2z^2x^2}{y^4} - \frac{2z^2}{xy} \geq 0$$

$$\left(\frac{xy}{z^2} - \frac{yz}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x^2} - \frac{zx}{y^2}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y^2} - \frac{xy}{z^2}\right)^2 \geq 0 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី៨៧

គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។

ចូរស្រាយតាមកំណើនថា :

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$ ។

តាង $T_n = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $T_1 = \frac{a_1^2}{x_1} - \frac{a_1^2}{x_1} = 0 \geq 0$ ពិត

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន :

$$T_2 = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} - \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)(a_1^2 x_2 + a_2^2 x_1) - x_1 x_2 (a_1 + a_2)^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} \geq 0$$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $T_k \geq 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k + 1$ គឺ $T_{k+1} \geq 0$ ពិត

គេមាន $T_k \geq 0$ (ការឧបមាខាងលើ)

គេបាន $\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_k^2}{x_k} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} \geq 0$

គេទាញ $\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$ គេបាន :

$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$$

ដោយ $\frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+...+x_{k+1}}$

គេទាញបាន :

$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_k}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1}}$$

នាំឱ្យ $T_{k+1}\ge 0$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_n{}^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+....+x_n}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\quad ?$$

គេមាន :

$$T=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$T=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(c+a)}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}$$

ដោយ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$

ហើយ $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $T\geq\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}$$

តាង $T=\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}$

$$T=\frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$$

$$T\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$

គេបាន $T-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}-\dfrac{1}{2}$

$$T-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\,\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)^2}\geq 0$$

គេទាញបាន $T\geq\dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}\geq\dfrac{1}{2}$

លំហាត់ទី៩០

គេឱ្យស៊ីត $a_1 ; a_2 ; ....; a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$a_1 = 0 ; |a_2| = |a_1 + 1| ;...$ និង $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

យើងមាន $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$

នាំឱ្យ $a_n{}^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$

គេបាន $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(a_k{}^2) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} + 1) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k{}^2 + 2a_k + 1)$

$$a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n}(a_k) + n$$

គេទាញ $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k) = \dfrac{a_{n+1}^2 - n}{2} \geq -\dfrac{n}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេឱ្យ **a ; b ; c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \text{ ។}$$

តាង $T=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

$$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$$

$$=\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)-1$$

$$\ge\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\ge\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}-1=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+3-1=2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឱ្យ **a ; b ; c** ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ ។

ដោយ **a ; b ; c** ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន :

$$a+b-c>0\,;\,b+c-a>0\,;c+a-b>0$$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwartz** គេបាន :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}\quad(1)$$

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{a}\quad(2)$$

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព **(1) ; (2)** និង **(3)** គេទទួលបាន :

$$2(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b})\le 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (**R :** កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$ **(I)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ **(II)**

យក **(I)** ជួសក្នុង **(II)** គេបាន :

$4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C - 8R^2\sin B\sin C\cos A$

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$

គេទាញ $\cos A = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C\sin A}$ **(1)**

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \frac{\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B}{2\sin C\sin A\sin B}$ **(2)**

ហើយនឹង $\cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ **(3)**

ប្តូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបាន :

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ ចំពោះគ្រប់ $x\ ;\ y\ ;\ z > 0$

គេមាន $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ y^2 + z^2 \geq 2yz \\ z^2 + x^2 \geq 2zx \end{cases}$

គេបាន $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$

ឬ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy + 2yz + 2zx$ គេបាន :

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

ដោយយក $x = \cot A\ ;\ y = \cot B\ ;\ z = \cot C$

គេបាន $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3$

នាំឱ្យ $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$ (5)

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន :

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \ge \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឱ្យ $A\ ;\ B\ ;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0<A\ ;B\ ;C<\pi$ នោះ $0<\frac{A}{2}\ ;\frac{B}{2}\ ;\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2} > 0$; $\cot\frac{B}{2} > 0$; $\cot\frac{C}{2} > 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឱ្យ **A ; B ; C** ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

ដោយ **A ; B ; C** ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A > 0; \tan B > 0; \tan C > 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គ្រប់ $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$ គេមានៈ

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) \ge 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) \ge (1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

យក $x = \tan A$; $y = \tan B$; $z = \tan C$ គេបាន :

$$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{\tan A \tan B \tan C})^3$$

គេមាន $\tan(A+B) = \tan(\pi - C)$ ឬ $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan B = \tan A \tan B \tan C$

$$x + y + z = xyz$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$xyz \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

គេទាញ $xyz \ge 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A \tan B \tan C \ge 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan B) \ge (1+\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឱ្យ $a\,;\ b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$ ។

ជ្រើសរើស $A\,,B\,,C\in\,]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt{2}\tan A \\ b=\sqrt{2}\tan B \\ c=\sqrt{2}\tan C \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} a^2+2=2(1+\tan^2 A)=\dfrac{2}{\cos^2 A} \\ b^2+2=2(1+\tan^2 B)=\dfrac{2}{\cos^2 B} \\ c^2+2=2(1+\tan^2 C)=\dfrac{2}{\cos^2 C} \end{cases}$

នាំឱ្យ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\dfrac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$

តាង $T=ab+bc+ca$

$$T=2(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)$$

$$T=\frac{2(\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{2\,[\,\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\,]}{\cos A\cos B\cos C}$$

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង :

$$\frac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}\geq\frac{18\,[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)]}{\cos A\cos B\cos C}$$

គេទាញបាន :

$$\cos A\cos B\cos C\left[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\right]\le \frac{4}{9}$$

តាង $\theta=\dfrac{A+B+C}{3}$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង Jensen យើងបាន :

$$\cos A\cos B\cos C\le\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\le \cos^3\theta$$

គេទាញ $\cos^3\theta\,(\cos^3\theta-\cos 3\theta)\le\dfrac{4}{9}$

ដោយ $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

គេបាន $\cos^3\theta\,(3\cos\theta-3\cos^3\theta)\le\dfrac{4}{9}$

$$\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)\le\frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.(1-\cos^2\theta)\le\left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta}{3}\right)^3$$

នាំឱ្យ $\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)\le\dfrac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩៧

ប្រសិនបើ $xyx=(1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0\le x;y;z\le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge\frac{3}{4}$ ។

គេមាន $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ x

គេទាញ $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ ដោយ $0\le x\le 1$ នោះគេទាញបាន :

$0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$0\le y(1-y)\le\frac{1}{4}$ និង $0\le z(1-z)\le\frac{1}{4}$

យើងបាន $xyz(1-x)(1-y)(1-z)\le\frac{1}{64}$

ដោយ $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ នោះ$(xyz)^2\le\frac{1}{64}$ នាំឱ្យ $xyz\le\frac{1}{8}$ ។

តាង $T=x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)$

$$=(x+y+z)-(xy+yz+xz)$$

ដោយ $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$

ឬ $(x+y+z)-(xy+yz+zx)=1-2xyz$

គេទាញ $T=1-2xyz\ge 1-2\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge\frac{3}{4}$

លំហាត់ទី៩៨

គេឱ្យ **a ; b ; c** ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន
បរិមាត្រស្មើ **2** ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ ។

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ **2** នោះជ្រុងទាំងបី**a ; b ; c**
របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង **1** ។

យើងបាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A < \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p = 1$

នោះ $S = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{1}{2}$

គេទាញ $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1-2+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$

ឬ $1 < (ab+bc+ca)-abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab+bc+ca)-2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេទាញ ៖

$$a^2+b^2+c^2+2abc=(a+b+c)^2+2abc-2(ab+bc+ca)$$

$$a^2+b^2+c^2+2abc=4-\left[2(ab+bc+ca)-2abc\right]$$

ដោយ $2<2(ab+bc+ca)-2abc<\frac{5}{2}$

គេបាន $4-\frac{5}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<4-2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$ ។

គេមាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}$

ដោយ $x+y+z=1$ នាំឱ្យ $\begin{cases}1-x=y+z\\1-y=x+z\\1-z=x+y\end{cases}$

គេបាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$y+z\geq 2\sqrt{yz}$; $z+x\geq 2\sqrt{zx}$ និង $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

គេបាន $(y+z)(z+x)(x+y)\geq 8xyz$

នាំឱ្យ $\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}\geq 8$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

តាង $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-2.\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

ដោយ $a^2+b^2+c^2=1$ នោះគេទាញ :

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{b^2+c^2}{a^2} ; \frac{1}{b^2}=1+\frac{a^2+c^2}{b^2} ; \frac{1}{c^2}=1+\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពទាំងនេះគេបាន :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

កន្សោម T អាចសរសេរ :

$$T=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geq 0$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

បើ $a=b=c$ នោះវិសមភាពខាងលើក្លាជាសមភាព ។

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ គ្រប់ $x>0$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\ge\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះយើងត្រូវកំណត់អនុគមន៍លីនេអ៊ែមួយដែល

$f(x)\ge\alpha x+\beta$ (*) ហើយ α និង β ជាពីរចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (*)

ពិតចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយសារតែវិសមភាពពិតចំពោះ $a=b=c$ នោះយើងនឹងកំណត់រក α និង β

ដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង $(c):y=f(x)$ ប៉ះនឹង $(d):y=\alpha x+\beta$ ត្រង់ $x=1$

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $f(1)=\alpha+\beta$ និង $f'(1)=\alpha$ ។

ដោយ $f(1)=\dfrac{1}{2}$ នោះ $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x^2+2x+1}-\dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+2x+1}}.x^2}{2x^2+2x+1}$

គេបាន $f'(1)=\dfrac{4-\frac{5}{4}}{4}=\dfrac{11}{16}$ នោះ $\alpha=\dfrac{11}{16}$ ហើយ $\beta=\dfrac{1}{2}-\alpha=-\dfrac{3}{16}$

ហេតុនេះ $f(x)\geq\dfrac{11x-3}{16}$ ឬ $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}\geq\dfrac{11x-3}{16}$ $(**)$

-បើ $0<x<\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព $(**)$ ពិតជានិច្ចព្រោះអង្គទី១ជាកន្សោមវិជ្ជមាន ជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ ហើយអង្គទីពីរអវិជ្ជមាន ។

-បើ $x\geq\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព $(**)$ អាចសរសេរ :

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\right)^2\geq\frac{(11x-3)^2}{256}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(14x^2+39x-9)}{256(2x^2+x+1)}\geq 0$$

វាពិតចំពោះគ្រប់ $x\geq\dfrac{3}{11}$ ព្រោះ $14x^2+39x-9>0$ ។

តាម $(**)$ គេជំនួស x ដោយ $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{c}{a}$ គេបាន :

$$bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\geq\frac{11a-3b+11b-3c+11c-3a}{16}$$

$$=\frac{8a+8b+8c}{16}=\frac{a+b+c}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

លំហាត់ទី១០២

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{29a^3-b^3}{ab+6a^2}+\frac{29b^3-c^3}{bc+6b^2}+\frac{29c^3-a^3}{ca+6c^2}\le 4(a+b+c)$$

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{29x^3-1}{x+6x^2}$ គ្រប់ $x>0$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\le 4(a+b+c)$ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះយើងត្រូវកំណត់អនុគមន៍លីនេអ៊ែមួយដែល

$f(x)\le \alpha x+\beta$ (*) ហើយ α និង β ជាពីរចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (*)

ពិតចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយសារតែវិសមភាពពិតចំពោះ $a=b=c$ នោះយើងនឹងកំណត់រក α និង β

ដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង $(c):y=f(x)$ ប៉ះនឹង $(d):y=\alpha x+\beta$ ត្រង់ $x=1$

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $f(1)=\alpha+\beta$ និង $f'(1)=\alpha$ ។

គេមាន $f(1)=\dfrac{29-1}{1+6}=4$ នោះ $\alpha+\beta=4$

ហើយ $f'(x)=\dfrac{87x^2(x+6x^2)-(1+12x)(29x^3-1)}{(x+6x^2)^2}$

គេបាន $f'(1)=\dfrac{87\times7-13\times28}{7^2}=\dfrac{87-52}{7}=5$ នោះ $\alpha=5$

ហើយ $\beta=4-\alpha=4-5=-1$ ។

គេបានវិសមភាព $\dfrac{29x^3-1}{x+5x^2}\le 5x-1 \quad (**)$

គេមាន $\dfrac{29x^3-1}{x+6x^2}-(5x-1)=-\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x(1+6x)}\le 0 \quad \forall x>0$

នាំឱ្យវិសមភាព $(**)$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយជំនួស $x=\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}$ ក្នុង $(**)$ គេបាន ៖

$$bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\le(5a-b)+(5b-c)+(5c-a)$$
$$=4a+4b+4c$$
$$=4(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\dfrac{29a^3-b^3}{ab+6a^2}+\dfrac{29b^3-c^3}{bc+6b^2}+\dfrac{29c^3-a^3}{ca+6c^2}\le 4(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី១០៣

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}\ .$$

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ គ្រប់ $x>0$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\geq\dfrac{a+b+c}{3}$ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះយើងត្រូវកំណត់អនុគមន៍លីនេអ៊ែមួយដែល

$f(x)\geq\alpha x+\beta$ (*) ហើយ α និង β ជាពីរចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (*)

ពិតចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយសារតែវិសមភាពពិតចំពោះ $a=b=c$ នោះយើងនឹងកំណត់រក α និង β

ដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង $(c):y=f(x)$ ប៉ះនឹង $(d):y=\alpha x+\beta$ ត្រង់ $x=1$

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $f(1)=\alpha+\beta$ និង $f'(1)=\alpha$ ។

គេមាន $f(1)=\dfrac{1}{3}$ នោះ $\alpha+\beta=1$ ឬ $\beta=1-\alpha$

ហើយ $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+x+1)-x^3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

គេបាន $f(1)=\dfrac{9-3}{9}=\dfrac{2}{3}$ នាំឱ្យ $\alpha=\dfrac{2}{3}$ ហើយ $\beta=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ ។

គេបានវិសមភាព $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}\geq\dfrac{2x-1}{3}$ (**)

គេមាន $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{3(x^2+x+1)}\geq 0$ គ្រប់ $x>0$

នោះមានន័យថាវិសមភាព $(**)$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយជំនួស $x=\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}$ ក្នុង $(**)$ គេបាន :

$$bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\geq\frac{2a-b+2b-c+2c-a}{3}$$

$$=\frac{a+b+c}{3}$$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}\ .$$

លំហាត់ទី១០៤ (Turkey 2007)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

ជាដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$

សមមូល $(ab+bc+ca)^2\geq ab(ab+2c^2+2c)$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geq 2abc^2+2abc$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $b^2c^2+c^2a^2+2abc\geq 2abc^2+2abc$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2-2abc^2=c^2(a-b)^2\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$ (1)

$$\frac{1}{bc+2a^2+2a}\geq\frac{bc}{(ab+bc+ca)^2}\quad(2)$$

$$\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{ca}{(ab+bc+ca)^2}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

លំហាត់ទី១០៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

ហើយមុំក្នុង A, B, C ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{9}{16S^2}$ ។

គេមាន $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

តាង $x = b^2+c^2-a^2$, $y = c^2+a^2-b^2$, $z = a^2+b^2-c^2$

ដែល $x, y, z \ge 0$ និង មិនអាចមានពីរសូន្យព្រមគ្នា ។

គេបាន $x+y = 2c^2$, $y+z = 2a^2$, $z+x = 2b^2$

ហើយ $16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$= 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

$$= (x+y)(z+x) - x^2 = xy+yz+zx$$

វិសមភាព $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{9}{16S^2}$ អាចបម្លែងទៅជា :

$$\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}\ge\frac{9}{xy+yz+zx}$$

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

តាមលក្ខណះអូម៉ូសែនគេអាចជ្រើសរើសយក $xy+yz+zx=1$ នោះវិសមភាព

ខាងលើសមមូល : $4\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2 \ge 9(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2$

ដោយ $(x+y)(x+z) = x^2+xy+xz+yz = x^2+1$

ហើយ $(x+y)(y+z)(x+z) = (x^2+1)(y+z)$

$$= x^2(y+z)+y+z$$

$$= x(xy+xz)+y+z$$

$$= x(1-yz)+y+z$$

$$= x+y+z-xyz$$

គេបាន $4\sum_{cyc}(x^2+1)^2 \ge 9(x+y+z-xyz)^2$

$4[(x^2+1)^2+(y^2+1)^2+(z^2+1)^2] \ge 9(x+y+z-xyz)^2$

$4[(x^4+y^4+z^4)+2(x^2+y^2+z^2)+3] \ge 9(x+y+z-xyz)^2$ (*)

តាង $S = x+y+z$ និង $P = xyz$

ដែល $S = a^2+b^2+c^2 > 0$ និង $P \ge 0$ ព្រោះ $x, y, z \ge 0$ ។

គេបាន $S^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2$

ហើយ $(S^2-2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+y^2z^2)$

ដោយ $xy+yz+xz = 1$ នោះ $(xy+yz+xz)^2 = 1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z) = 1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 = 1-2SP$

នោះ $(S^2-2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(1-2SP)$

នាំឱ្យ $x^4+y^4+z^4=S^4-4S^2+4SP+2$

វិសមភាព (*) ខាងលើសមមូល :

$$4(S^4-4S^2+4SP+2+2S^2-4+3)\geq 9(S-P)^2$$
$$4(S^4-2S^2+4SP+1)\geq 9(S-P)^2$$
$$4S^4-8S^2+16SP+4\geq 9(S-P)^2$$
$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9(S-P)^2 \quad (**)$$

-ចំពោះ $S\geq 2$ គេមាន $(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 0$

នាំឱ្យវិសមភាព (**) ពិត

ព្រោះ $9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2\geq 9(S-P)^2$ ។

-ចំពោះ $0<S<2$ វិសមភាព (**) អាចសរសេរ :

$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2-18SP+9P^2$$
$$(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2\geq 0$$

តាង $T=(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2$

យើងនឹងស្រាយថា $T\geq 0$ ។

គេមាន $(x+y+z)(xy+yz+xz)\geq 9xyz$ (តាម $AM-GM$)

ដោយ $xy+yz+zx=1$ នោះ $S\geq 9P$

ហើយ $T=(4S^2-1)(S^2-4)+P(S-9P)+33SP$

គេបាន $T\geq (4S^2-1)(S^2-4)+33SP$

តាមវិសមភាព **Schur** គេមាន $\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z) \geq 0$

ដោយ $x^2(x-y)(x-z) = x^4 + x^2yz - x^3(y+z)$

គេបាន $\sum_{cyc}(x^4) + xyz\sum_{cyc}(x) \geq \sum_{cyc} x^3(y+z)$

ដោយ $\sum_{cyx}(x^4) = S^4 - 4S^2 + 4SP + 2$, $xyz\sum_{cyc} x = SP$

និង $\sum_{cyc} x^3(y+z) = \sum_{cyc} x^2(xy+xz) = \sum_{cyc} x^2(1-yz)$

$$= \sum_{cyc} x^2 - xyz\sum_{cyc} x = S^2 - 2 - SP$$

គេបាន $S^4 - 4S^2 + 5SP + 2 \geq S^2 - SP - 2$

$$6SP \geq -S^4 + 5S^2 - 4$$

$$6SP \geq (4 - S^2)(S^2 - 1)$$

ហេតុនេះ $T \geq (4S^2 - 1)(S^2 - 4) + \frac{11}{2} \times 6SP$

$$T \geq (4S^2 - 1)(S^2 - 4) + \frac{11}{2}(4 - S^2)(S^2 - 1)$$

$$T \geq \frac{3}{2}(4 - S^2)(S^2 - 3)$$

ដោយ $0 < S \leq 2$ នោះ $4 - S^2 \geq 0$

ហើយ $S^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 3$ នោះ $S^2 - 3 \geq 0$

គេទាញបាន $T \geq \frac{3}{2}(4-S^2)(S^2-3) \geq 0$ ពិត ។

សរុបមកគេបាន $(xy+yz+zx)[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}] \geq \frac{9}{4}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4} \geq \frac{9}{16S^2}$ ។

☞ **សម្គាល់ :** ហេតុអ្វីបានជាក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$(xy+yz+zx)[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}] \geq \frac{9}{4}$ (*)

គេអាចជ្រើសរើសយក $xy+yz+zx=1$?

ព្រោះថាបើគេយក $xy+yz+zx=t^2>0$

ហើយតាង $x=t.u\,,\ y=t.v\ ,\ z=t.w$ នោះវិសមភាព (*) សមមូល

$$t^2\left[\frac{1}{(tu+tv)^2}+\frac{1}{(tv+tw)^2}+\frac{1}{(tw+tu)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

$$t^2\left[\frac{1}{t^2(u+v)^2}+\frac{1}{t^2(v+w)^2}+\frac{1}{t^2(w+u)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{(u+v)^2}+\frac{1}{(v+w)^2}+\frac{1}{(w+u)^2} \geq \frac{9}{4} \quad (**)$$

មានន័យថាវិសមភាព (**) ដូចគ្នានឹងវិសមភាព (*) ពេល $xy+yz+zx=1$ ។

លំហាត់ទី១០៦.

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}\ge\dfrac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

ដោយ x,y,z ជាចំនួនពិតខុសគ្នា និង មិនអវិជ្ជមាននោះគេអាចសន្មតយក

$z>y>x\ge 0$ ។

តាង $A=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}$

និង $B=xy+yz+zx$ ។

យក $y=x+p$, $z=x+p+q$ ដែល $p>0,q>0$

គេបាន $A=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{(p+q)^2}$

និង $B=x(x+p)+(x+p)(x+p+q)+x(x+p+q)$

$$=3x^2+2(2p+q)x+p^2+pq$$

ដោយសារតែ $x\ge 0$ នោះ $B\ge p^2+pq=p(p+q)$

គេបាន $A\times B\ge\left[\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{q^2}+\dfrac{1}{(p+q)^2}\right]p(p+q)$

$$=\frac{p+q}{p}+\frac{p(p+q)}{q^2}+\frac{p}{p+q}$$

$$=1+\frac{q}{p}+\frac{p(p+q)}{q^2}+1-\frac{q}{p+q}$$

$$=2+(\frac{q}{p}-\frac{q}{p+q})+\frac{p(p+q)}{q^2}$$

$$=2+\frac{q^2}{p(p+q)}+\frac{p(p+q)}{q^2}$$

ដោយ $\frac{q^2}{p(p+q)}+\frac{p(p+q)}{q^2}\geq 2\sqrt{\frac{q^2}{p(p+q)}.\frac{p(p+q)}{q^2}}=2$

គេទាញបាន $A\times B\geq 2+2=4$ នាំឱ្យ $A\geq\frac{4}{B}$

ដូចនេះ $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\begin{cases}3x^2+2(2p+q)x=0\\ p(p+q)=q^2\end{cases}$

គេទាញបាន $x=0$ និង $p(p+q)=q^2$ ហើយ $y=p\,,z=p+q$

នោះ $z-y=q$ តាម $p(p+q)=q^2$ គេទាញបាន $yz=(z-y)^2$

នាំឱ្យ $z^2-3yz+y^2=0$ ដោយ $z>y$ នោះ $\frac{z}{y}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១០៧

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

គេមាន :

$$X=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

និង $Y=\dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}=\dfrac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$

គេបាន $Y-X=\dfrac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$

បន្ទាប់ពីតម្រូវភាគរួម រួចសម្រួលគេបាន :

$$Y-X=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}\ge 0$$ នាំឱ្យ $Y\ge X$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$ ។

លំហាត់ទី១០៨ (USAMO 2003)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

របៀបទី១

តាង $T=\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $s=a+b+c$ នោះកន្សោម T អាចសរសេរ :

$$T=\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}+\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}+\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}$$

គេមាន $\dfrac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\dfrac{a^2+2as+s^2}{3a^2-2as+s^2}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2+6as+3s^2}{3a^2-2as+s^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8as+2s^2}{3a^2-2as+s^2}\right)$$

$$\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{9a^2-6as+3s^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}$$

ដោយ $(3a-s)^2\ge 0$ នោះ $(3a-s)^2+2s^2\ge 2s^2$

ឬ $\dfrac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}\le\dfrac{8as+2s^2}{2s^2}=1+\dfrac{4a}{s}=1+\dfrac{4a}{a+b+c}$

គេទាញ $\dfrac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2} \le \dfrac{4}{3} + \dfrac{4a}{a+b+c}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាខាងលើដែរគេបាន :

$$\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2} \le \frac{4}{3} + \frac{4b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2} \le \frac{4}{3} + \frac{4c}{a+b+c} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន :

$$T \le \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4a+4b+4c}{a+b+c} = 4+4=8$$

ដូចនេះ $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$ ។

របៀបទី២

តាង $T = \dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \dfrac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$

គេបាន $\begin{cases} x+z=2a+b+c \\ x+y=2b+c+a \\ z+y=2c+a+b \end{cases}$ និង $\begin{cases} 2a=x+z-y \\ 2b=x+y-z \\ 2c=z+y-x \end{cases}$

កន្សោម T អាចសរសេរជា :

$$T=\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}+\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2}+\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$: $2(u^2+v^2)\ge(u+v)^2$

គេបាន $2(x+z-y)^2+2y^2\ge(x+z-y+y)^2=(x+z)^2$

$$2(x+z-y)^2+4y^2\ge(x+z)^2+2y^2$$

$$(x+z-y)^2+2y^2\ge\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2$$

គេទាញ $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{2(x+z)^2}{\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2}=\dfrac{4}{1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}}$

ដោយ $(x+z)^2\le2(x^2+z^2)$ នាំឱ្យ $\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{y^2}{x^2+z^2}$

ឬ $1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+z^2}$

គេទាញបាន $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{4(x^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}\quad(1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចខាងលើដែរគេបាន :

$$\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} \le \frac{4(z^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (2)$$

$$\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \le \frac{4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព **(1) , (2) , (3)** គេបាន :

$$T \le \frac{4(x^2+z^2)+4(z^2+y^2)+4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} = 8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$ ។

របៀបទី៣

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

គេមានសមភាព $(2u+v)^2+2(u-v)^2=3(2u^2+v^2)$

ដោយយក $u=a$ និង $v=b+c$ នោះគេបាន :

$$(2a+b+c)^2+2(a-b-c)^2=3\left(2a^2+(b+c)^2\right)$$

ឬ $(2a+b+c)^2=3\left(2a^2+(b+c)^2\right)-2(a-b-c)^2$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2a^2+(b+c)^2$ គេបាន :

យើងបាន $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=3-\frac{2(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$

កន្សោម **T** អាចបំលែងជា :

$$T = 9 - 2\left[\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\right]$$

ដើម្បីស្រាយថា $T \le 8$ យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា :

$$S = \frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \ge \frac{1}{2}$$

គេមាន $2a^2+(b+c)^2 = 2a^2+b^2+c^2+2bc$

ដោយ $2bc \le b^2+c^2$ នោះ $2a^2+(b+c)^2 \le 2(a^2+b^2+c^2)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2b^2+(c+a)^2 \le 2(a^2+b^2+c^2)$

ហើយ $2c^2+(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញ $S \ge \dfrac{(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

ដោយកន្សោម $(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2$

ស្មើនឹង $3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

នោះ $S \ge \dfrac{3}{2} - \dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

គេមាន $\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{c^2+a^2}{2} \ge ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ នាំឱ្យ $S \ge \dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ ពិត ។

របៀបទី៤

ស្រាយថា $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

តាង $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$

ដែល $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le 8$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}-\frac{8}{3}\le\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}$ គ្រប់ $u>0$

គេមាន $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{3}=-\frac{(u+5)(u-2)^2}{3(2+u^2)(1+u)}\le 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}\le\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$ (*)

តាម (*) គេបាន :

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}-1+8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

លំហាត់ទី១០៩ (**Baltic Way 2010**)

គេយក x ជាចំនួនពិត ដោយដឹងថា $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1$ ។

ដោយជំនួស $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ និង $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ វិសមភាពសមមូល

$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq 1$ ហើយ $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \sin^2 x \geq 3\cos^2 x$$

ឬ $\frac{\cos^3 x}{\sin x} \geq \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{2}$ (1)

ហើយ $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \cos^2 x \geq 3\sin^2 x$

ឬ $\frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq \frac{3\sin^2 x - \cos^2 x}{2}$ (2)

បូកវិសមភាព (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1$ ។

លំហាត់ទី១១០ **(China National Olympiad 2005)**

ស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{21}{16}$ និងចំពោះ $n \geq 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m \geq 2$ ។ ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n \leq m$

យើងបាន $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}$?

បង្ហាញថា $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}$

គេមាន $2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

នាំឱ្យ $2^n a_n - 3.2^{n-1}a_{n-1} = \frac{3}{4}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^n}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k a_k - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} a_{k-1}\right] = \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}a_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}\cdot\frac{21}{16} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

គេទាញបាន $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2^{n+3}}$ ឬ $a_n + \frac{3}{2^{n+3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

តាង $P = \left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $P = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេមាន $\frac{m^2-1}{m-n+1} = \frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)-n} = \frac{m-1}{1-\frac{n}{m+1}}$

ដើម្បីស្រាយឱ្យឃើញថា $P < \frac{m^2-1}{m-n+1}$

យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $(1-\frac{n}{m+1})P < m-1$

តាមវិសមភាព **Bernoully** គេមាន

$$1-\frac{n}{m+1} < (1-\frac{1}{m+1})^n = \left(\frac{m}{m+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^n$$

នាំឱ្យ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m < \left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{mn} = \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}\right]^n$

ចំពោះគ្រប់ $m \geq 2$ តាមទ្វេធាញូតុន គេមាន :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2+....+\frac{1}{m^m}C_m^m$$

នោះ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2 = \frac{5}{2}-\frac{1}{2m} \geq \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

គេទាញបាន $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m < \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ ឬ $1-\frac{n}{m+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$

គេទាញ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)P < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}} P$

តែ $P = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $(1-\frac{n}{m+1})P < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)$

ឧបមាថា $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right) < m-1$ ពិត

ដោយតាង $\mathbf{u = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}}$ នោះ $\mathbf{u(m - u^{m-1}) < m - 1}$

សមមូល $\mathbf{mu - u^m - m + 1 < 0}$

$$\mathbf{m(u-1) - (u^m - 1) < 0}$$

$$\mathbf{(u-1)[m - (u^{m-1} + ... + u + 1)] < 0}$$

ដោយ $\mathbf{m \geq n}$ & $\mathbf{m \geq 2}$ នោះ $\mathbf{0 < u = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}} < 1}$

នាំឱ្យ $\mathbf{(u-1)[m - (u^{m-1} + ... + u + 1)] < 0}$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}}$ ។

លំហាត់ទី១១១. **(Croatia Team Selection Tests 2011)**

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$

គេមាន $\frac{a^2}{a+b^2}=\frac{a(a+b^2)-ab^2}{a+b^2}=a-\frac{ab^2}{a+b^2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c^2}=b-\frac{bc^2}{b+c^2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a^2}=c-\frac{ca^2}{c+a^2}$ (3)

តាង $S=\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}$ ។ បូកវិសមភាព (1),(2) & (3)

គេបាន $S=3-(\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2})$

ដើម្បីស្រាយថា $S\geq\frac{3}{2}$ នោះយើងនឹងស្រាយថា :

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}=3-S\leq3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b^2\geq2b\sqrt{a}=\frac{2ab^2}{b\sqrt{a}}$

គេទាញ $\frac{ab^2}{a+b^2}\leq\frac{b\sqrt{a}}{2}$ ហើយ $\frac{bc^2}{b+c^2}\leq\frac{c\sqrt{b}}{2}$, $\frac{ca^2}{c+a^2}\leq\frac{a\sqrt{c}}{2}$

ហេតុនេះ $\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}\leq\frac{1}{2}(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})$ (*)

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2 \le (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2 \le 3(ab+bc+ca)$$

ហើយ $(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$

$$(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$$

$$ab+bc+ca \le (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 9$$

គេទាញ $(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2 \le 3(ab+bc+ca) \le 9$

នាំឱ្យ $a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b} \le 3$ (**)

តាមវិសមភាព (*) & (**) គេទាញបាន :

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2} \le \frac{3}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១១២ (Greece National Olympiad 2007)

គេឱ្យ a,b,c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+a(a+b-c)\geq 2(c+a-b)^2$$

គេទាញ $\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq 2(c+a-b)^2-a(a+b-c)$

ឬ $$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq a^2+2b^2+2c^2+5ac-5ab-4bc \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}\geq 2a^2+b^2+2c^2+5ab-5bc-4ac \quad (2)$$

$$\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq 2a^2+2b^2+c^2+5bc-5ac-4ab \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន :

$S\geq 5(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca)\geq ab+bc+ac$ ពិត

ដូចនេះ $S=\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី១១៣ **(IMO Longlists 1980)**

គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម :

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

គេមាន $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} = \frac{a_k(n + a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(a_k + n)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0 = \frac{1}{2} > 0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k > 0$ ពិត

តាម $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1} > 0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k > 0$ នោះ $a_k + n > n$ ឬ $\frac{1}{a_k + n} < \frac{1}{n}$, $\forall n > 1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{(n)} = \frac{n}{n} = 1$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}<1$ នាំឱ្យ $a_n<1$ (i)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a_n<1$ នោះ $a_k<1$ ឬ $a_k+n<n+1$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}>\frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k=0,1,2,....,n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n>1$ គេមាន $\frac{n}{n+1}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{2}{n^2-1}>0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\frac{n}{n+1}>\frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}>\frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n}<2-\frac{n-2}{n-1}=\frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n>\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

ដូចនេះ $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

លំហាត់ទី១១៤ (**Malaysia National Olympiad 2010**)

ចំពោះគ្រប់ a,b,c ធំជាងមួយ ចូរបង្ហាញថា :

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab \ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$$

តាង $A=\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$

និង $B=4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$

ហើយយក $x=\ln a\ ,\ y=\ln b\ ,z=\ln c$

ចំពោះ $a,b,c>1$ នោះ $x,y,z>0$

តាមរូបមន្តប្តូរគោល $\log_q p=\dfrac{\ln p}{\ln q}$ គេបាន :

$$A=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=x(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+y(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})+z(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$$

$$B=4(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x})=\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$$

តាមវិសមភាព $AB-GM$ គ្រប់ $u,v>0:u+v\ge 2\sqrt{uv}$

ឬ $(u+v)^2\ge 4uv$ ឬ $\dfrac{u+v}{uv}\ge\dfrac{4}{u+v}$ ឬ $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\ge\dfrac{4}{u+v}$

គេទាញ $x(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z})\ge\dfrac{4x}{y+z};y(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x})\ge\dfrac{4y}{z+x};z(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})\ge\dfrac{4z}{x+y}$

បូកវិសមភាពនេះគេបាន $A\ge B$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab \ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$$

លំហាត់ទី១១៥ **(Morocco National Olympiad 2011)**

គេតាង α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយដែលមានបរិមាត្រ **2p** និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ **R** ។

a/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$

b/ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

ដំណោះស្រាយ

a/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$

គេមាន $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}=3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ge\frac{27R^2}{p^2}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)^2 \quad (1)$$

ដោយប្រើ $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^{\,2}}{b_2}+\frac{a_3^{\,2}}{b_3}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$

គេបាន $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនួសអនុវត្តន៍ក្នុង $\Delta\,\mathbf{ABC}$ គេបាន :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$$

គេទាញ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{p}{R}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{9R}{p}\ (2)$

តាម $(1)\,\&\,(2)$ គេទាញបាន :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\geq\frac{1}{3}\times\frac{81R^2}{p^2}=\frac{27R^2}{p^2}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$ ។

b/ វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\gamma}$

គេទាញបាន $\alpha=\beta=\gamma$ នាំឱ្យ ΔABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១១៦ (Japan 1997)

គេយក $\mathbf{a,b,c}$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$$

តាង $T=\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}$

យក $x=\frac{b+c}{a}\ ,\ y=\frac{c+a}{b}\ ,\ z=\frac{a+b}{c}$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$ ហើយកន្សោម T ទៅជា

$T=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(y-1)^2}{y^2+1}+\frac{(z-1)^2}{z^2+1}$ ។

បើ $x=y=z=2$ គេបាន $T=\frac{3}{5}$ ជាករណីដែលវិសមភាពក្លាយជាសមភាព ។

យើងសន្មតថាមានពីរចំនួនពិត a និង b ដែលនាំឱ្យ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{a}{x+1}+b$ ពិត

គ្រប់ $x>0$ ហើយដោយ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$ នោះដើម្បីឱ្យ $T\geq\frac{3}{5}$

លុះត្រាតែ $(\frac{a}{x+1}+b)+(\frac{a}{y+1}+b)+(\frac{a}{z+1}+b)=\frac{3}{5}$

នាំឱ្យ $a+3b=\frac{3}{5}\,(*)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយសមភាពកើតឡើងចំពោះ $x=2$ នោះ $x=2$ ជាឬសឌុប

របស់សមីការ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{a}{x+1}+b$

ឬ $(x+1)(x-1)^2-(x^2+1)(a+b+bx)=0$

តាង $f(x)=(x+1)(x-1)^2-(x^2+1)(a+b+bx)$

$x=2$ ជាឬសឌុបនៃ $f(x)=0$ នោះ $f'(2)=0$

ដោយ $f'(x)=(x-1)^2+2(x^2-1)-2x(a+b+bx)-b(x^2+1)$

នោះ $f'(2)=1+6-4(a+3b)-5b=7-4\times\frac{3}{5}-5b=0$

គេទាញបាន $b=\frac{23}{25}$ ហើយតាម (*) គេបាន $a=\frac{3}{5}-3b=-\frac{54}{25}$

គេបាន $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(x+1)}$ សមមូល $\frac{2(x-2)^2(x+7)}{25(x+1)(x^2+1)}\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(x+1)}\ (1)$

$\frac{(y-1)^2}{y^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(y+1)}\ (2)$ និង $\frac{(z-1)^2}{z^2+1}\geq\frac{23}{25}-\frac{54}{25(z+1)}\ (3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\ \&\ (3)$ គេបាន :

$$T\geq\frac{23}{25}\times 3-\frac{54}{25}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)=\frac{69-54}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}$ ។

លំហាត់ទី១១៧. (Iran 1996)

គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}\quad(*)$$

តាង $x=a+b+c\ ,\ y=ab+bc+ca\ ,\ z=abc$

គេមានសមភាព :

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$=xy-z$$

និង $\sum\limits_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2=(x^2+y)^2-4x(xy-z)$

វិសមភាព (*) ខាងលើសមមូល $y\left[\dfrac{(x^2+y)^2-4x(xy-z)}{(xy-z)^2}\right]\ge\dfrac{9}{4}$

សមមូល $4x^4y-17x^2y^2+4y^3+34xyz-9z^2\ge 0$

$$xy(x^3-4xy+9z)+y(x^4-5x^2y+4y^2+6xz)+z(xy-9z)\ge 0\ (**)$$

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x,y,z គេមាន :

$$\sum_{cyc}x(x-y)(x-z)\ge 0\Leftrightarrow x^3-4xy+9z\ge 0\ \ (1)$$

$$\sum_{cyc}x^2(x-y)(x-z)\ge 0\Leftrightarrow x^4-5x^2y+4y^2+6xz\ge 0\ \ (2)$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc \Leftrightarrow xy-9z\geq 0 \quad (3)$$

តាម $(1),(2)\ \&\ (3)$ គេទាញបាន $(**)$ ពិត ។

ដូចនេះ $(ab+bc+ca)\left[\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right]\geq \dfrac{9}{4}$ ។

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យ a,b,c,x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\le a+b+c$$

(Ukraine,2001)

2. គេឱ្យ $a,b,c\ge 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\ \ge$$
$$\ge a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$

(Gazeta Matematica)

3. បើ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=2$ នោះបង្ហាញថា :

$$a^3+b^3+c^3\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$ ។

តើសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា ?

(JBMO 2002 Shortlist)

4. គេឱ្យ $a\&b$ ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1}\ge\dfrac{1}{3}$

(Hungary 1996)

5. គ្រប់ចំនួនពិត x និង y ចូរបង្ហាញថា $3(x+y+1)^2+1\geq 3xy$ ។

(Columbia,2001)

6. គេឱ្យ $x,y\in(0,1)$ ។ បង្ហាញថា $x^y+y^x>1$?

7. គ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\leq\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\leq\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$$

(APMC 1993)

8.គ្រប់ចំនួនពិត x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នា ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\sqrt{xy}+\frac{x+y}{2}$$

9.គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 33$$

10.គ្រប់ចំនួនពិត $x,y,z>0$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3}\geq\frac{x+y+z}{3}$$

11.គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$$

12. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

(KMO Summer Program Test,2001)

13.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}$$

14. គេឱ្យចំនួនពិត $a,b,c \geq 1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$$

(Hongkong 1998)

15.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

16.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}$$

(IMO Short Lists 2004)

17. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

(Macedonia,1995)

18.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\le 1$$ ។

(IMO 2000)

19.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

(IMO Short Lists 1996)

20.គេឱ្យ $a,b,c,d>0$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2a+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\ge\frac{2}{3}$$

(IMO Short Lists 1993)

21. គេឱ្យ $a,b,c,d>0$ ដែល $ab+bc+cd+da=1$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$$

(IMO Short Lists 1990)

22. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$$

23. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

24. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=3$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$$

(Belarus 1999)

25. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

26. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^4+b^4+c^4=3$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1$$

(Moldova,2005)

27. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

(Greece 2002)

28. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

(Iran 1996)

29. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

(Albania 2002)

30. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$$

(Belarus 1997)

31.គេឱ្យ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)}\leq\frac{1}{7^4}$$

តើសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា ?

32.បើចំនួនពិត $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ នោះបង្ហាញថា :

$$5(a^2+b^2+c^2)\leq 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

33. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc\leq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$ ។

34.ចូរបង្ហាញថាបើ $n>3$ ហើយ $x_1,x_2,...,x_n>0$ មានផលគុណស្មើ 1

នោះ $\dfrac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\dfrac{1}{1+x_2+x_2x_3}+...+\dfrac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1$

(Russia,2001)

35.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ជាមួយ $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geq 2$$

36.គេឱ្យ $a,b,c\geq 0$ ដោយដឹងថា $a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$ ។

(Kvant,1988)

37.

38.គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមានផលបូកស្មើ 3 ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$ ។

(Russia 2002)

39.គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ac+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{a+bc}$$

40.គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c និង $a+x=b+y=c+z=1$ ។

បង្ហាញថា $(abc+xyz)(\dfrac{1}{ay}+\dfrac{1}{bz}+\dfrac{1}{cx})\geq 3$ ។ (Russia 2002)

41. គេឱ្យ $a,b\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

42. គេឱ្យបីចំនួនពិត $a,b,c\in(0,1)$ ដែល $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right)$$

43. គេឱ្យ $x,y,z\le1$ និង $x+y+z=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\le\frac{27}{10}$$

44. គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^2+y^2+z^2=2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $x+y+z\le xyz+2$

(IMO Shortlist 1987)

45.គេឱ្យ $a,b,c>0$ មាន $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge4(a+b+c-1)$$

(MOSP,2001)

46. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $a,b,c>0$ គេមាន :

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc(ab+bc+ca)$$

47. គេឱ្យ α, x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$ និង $\alpha \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \ge \frac{3}{2}$

48. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 1$ ។ ចូរបង្ហាញ :

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c} + \sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b\sqrt{3a} + \sqrt{bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b} + \sqrt{ca})} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

49. គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $x + y + z = xyz$ ។ ចូរបង្ហាញ :

$$(x-1)(y-1)(z-1) \le 6\sqrt{3} - 10$$

50. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \ge (1+a)(1+b)(1+c)$$

51. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a, b, c ដោយដឹងថា

$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ យើងមាន $0 \le ab + bc + ca - abc \le 2$

(USAMO,2001)

52. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញ :

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \le \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

53. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1 + \sqrt[3]{abc})}$$

54. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ដែល $a^2+b^2+c^2=9$ គេមាន :

$$2(a+b+c)-abc\le 10$$ ។

(Vietnam,2002)

55. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c បង្ហាញថា :

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\ge\frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4)$$

(Vietnam TST 1996)

56. គេឱ្យបីចំនួនពិត $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}$

(IMO 1984)

57. គេឱ្យបីចំនួនពិត $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2y+y^2z+z^2x\le\frac{4}{27}$

(Canada 1999)

58. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c\ge abc$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{3}\,abc$

(BMO 2001)

59. គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=\sqrt{xyz}$ ។

បង្ហាញថា $xy+yz+zx\ge 9(x+y+z)$ ។ (Bearus 1996)

60. គេឱ្យ $x, y, z \in IR$ ដែល $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ។

បង្ហាញថា $x + y + z \leq 2 + xyz$

(Poland 1991)

61. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a + b + c + \frac{1}{abc} \geq 4\sqrt{3}$

(Macedonia 1999)

62. គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតដែល $0 < x, y, z < 1$ និង $xy + yz + zx = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

63. គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតដែល $x + y + z = xyz$ $(x, y, z > 0)$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

64. គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតដែល $x + y + z = xyz$ $(x, y, z > 0)$ ។

បង្ហាញថា $xy + yz + zx \geq 3 + \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt{1 + z^2}$

65. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិត ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (ab + bc + ca - 1)^2$$

66. គេឱ្យ $x, y, z \geq 0$ ដែល $xy + yz + zx = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{z + x} \geq \frac{5}{2}$

67. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$

68.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\geq\frac{3}{8}$$

69. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=3$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}}\geq\frac{3}{2}$$

70. គេឱ្យ $a,b,c,d\geq 0$ ដែល $a+b+c+d=4$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^4}\geq 2$

71. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}\geq\frac{1}{3}$$

72.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

73. គេឱ្យ $x,y,z\in[1,2]$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\sum_{cyc}\left(\frac{x}{y+z}\right)$$

74. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{abc}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{10}{ab+bc+ca}$

75. គេឱ្យ $a,b,c>0$ និង $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{5}{2}$

76. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{54abc}{(a+b+c)^3}\geq 5$$

77. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

78. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2+2ab}\geq 1$$

79. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

80. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\leq\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^6$

81. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

82. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

83. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\leq 3$$

84. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\leq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

85. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\geq\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2}$$

86. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}}\leq\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

87. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\leq\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

88. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $ab+bc+ca=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a(1+a^2)}+\sqrt{b(1+b^2)}+\sqrt{c(1+c^2)}\geq 2\sqrt{a+b+c}$$

89. គេឱ្យ $a,b>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a+b)^2+(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2\geq 8(1+\sqrt{2})$$

90.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\geq 1+\sqrt{1+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}}$$

91.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

92. គេឱ្យ $x,y,z>0$ ។

បង្ហាញថា $x^xy^yz^z\geq(xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}$

93.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\leq 8(a^3+b^3+c^3)^2$$

94.គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$2\leq(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2\leq(1+x)(1+y)(1+z)$$

95.គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $xy+yz+zx=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

96.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

97.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{(1+b)(1+c)}+\frac{1}{(1+c)(1+a)}\leq\frac{3}{2}$$

98.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$1\leq\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\leq\sqrt{2}$$

99.គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\leq\frac{27}{8}$$

100. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)$$

101. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}}\leq\sqrt{3}$$

102. គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}\leq 1$$

103. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a + b + c \le a^2 + b^2 + c^2$

104. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c, d គេមានវិសមភាព

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \ge \frac{64}{a+b+c+d}$$

105. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a, b, c \le 1$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \le 1$$

(USAMO 1980)

106. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge \frac{1}{4}$$

107. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c+1)^2 + a^2 + 1} \le 1$$

108. គេឱ្យ $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $(0, \frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា :

$$\tan(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \tan(a_1 - \frac{\pi}{4}) + ... + \tan(a_n - \frac{\pi}{4}) \ge n - 1$$

ចូរបង្ហាញថា $\tan(a_0)\tan(a_1).....\tan(a_n) \ge n^{n+1}$

(USAMO 1998)

109. គេឱ្យ a , b, x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}$

110. គេឱ្យ $n\geq 2$ ជាចំនួនគត់ ហើយ $x_1 ,x_2 ,....,x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដោយដឹងថា $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+....+x_n^{\ 2}=1$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ :

$$\frac{x_1^{\ 5}}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^{\ 5}}{x_3+...+x_n+x_1}+...+\frac{x_n^{\ 5}}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}$$

111. គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃផលបូក :

$S=x_1+\frac{x_2^{\ 2}}{2}+\frac{x_3^{\ 3}}{3}+.....+\frac{x_n^{\ n}}{n}$ ។

(Poland 1995)

112. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , d គេមាន :

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\geq abcd(a+b+c+d)$$

113. គេឱ្យ a, b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3$$

(MOP 2002)

114. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

115. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ គេមាន :

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3\ge 3$$

116. គេឱ្យ a , b , c , x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\le a+b+c$$

117. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge(1+a)(1+b)(1+c)$

118. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

119. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

120. គ្រប់ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

121. ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a,b,c>0$ គេមាន :

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

122. គេឱ្យ $a , b , c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

123. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 8$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}}\geq\frac{4}{3}$$

124.ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនពិត $0 < x_1, x_2, \ldots, x_n \leq \frac{1}{2}$ គេមានវិសមភាព :

$$\left(\frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}-1\right)^n\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-1\right)$$

125. បង្ហាញថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេបាន :

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\leq\frac{1}{3}$$

126. បង្ហាញថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}\leq\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}$$

127. គេមាន $a, b, c, x, y, z \in IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព :

$$(a+b+c)(x+y+z)=3$$

និង $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$

ចូរបង្ហាញថា $ax+by+cz\geq 0$ ។

128. គេឱ្យ $a, b, c > 1$ ដែល $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\leq 1$ ។

129. បង្ហាញថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន :

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

130. គេឱ្យ $n \ge 2$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ដែល $a_1.a_2....a_n = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{{a_2}^2+1}{2}} + ... + \sqrt{\frac{{a_n}^2+1}{2}} \le a_1 + a_2 + ... + a_n$$

131. គេឱ្យ $a, b, c, x, y, z \in IR_+$ ដែល $xy + yz + zx = 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a(y+z)}{b+c} + \frac{b(z+x)}{c+a} + \frac{c(x+y)}{a+b} \ge 3$ ។

132. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c = 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \ge \frac{3}{2}$ ។

133. គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + ... + \sqrt[n]{a_1a_2..a_n}}{n} \le \sqrt[n]{a_1 . \frac{a_1+a_2}{2} ... \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}$$

134. ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន :

$$\frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2} + \frac{bc-ca+ab}{c^2+a^2} + \frac{ca-ab+bc}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

135. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+bc}{b^2+ca}+\frac{b^2+ca}{c^2+ab}+\frac{c^2+ab}{a^2+bc}\le\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

136. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x\ ,\ y\ ,\ z$ ដែល $x+y+z=1$ គេមាន :

$$\sqrt{x+(y-z)^2}+\sqrt{y+(z-x)^2}+\sqrt{z+(x-y)^2}\ge\sqrt{3}$$

137. គេឱ្យ $a\ ,b\ ,\ c$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង គ្មានពីរចំនួនណាស្មើសូន្យព្រមគ្នា។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab+bc-ca}{c^2+a^2}+\dfrac{bc+ca-ab}{a^2+b^2}+\dfrac{ca+ab-bc}{b^2+c^2}\ge\dfrac{3}{2}$

138. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}}\ge 2+\sqrt{2}$$

139. គេឱ្យ $a,b,\ c$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{c}{3a-b+c}+\dfrac{a}{3b-c+a}+\dfrac{b}{3c-a+b}\ge 1$

140. គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$a^2.\frac{a+2c}{3b}+b^2.\frac{b+2a}{3c}+c^2.\frac{c+2b}{3a}\ge a^2+b^2+c^2$$

141. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x\ ,\ y\ ,\ z$ ចូរស្រាយថា :

$$(x^2-yz)^2\ge\frac{27}{8}xy(xy-z^2)(zx-y^2)$$

142. គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^3+b^3+c^3+3}{4} \ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

143. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=2$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(a+c)} \ge 2$

144. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b , c ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ac}{2b+a+c}+\frac{b^2+ba}{2c+a+b}+\frac{c^2+cb}{2a+b+c} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

145. គេឱ្យ $a , b, c \in IR^+$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2+bc+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c+a)^2} \ge \frac{9}{4}$$

146. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{4b+3bc+4c}+\frac{b}{4c+3ca+4a}+\frac{c}{4a+3ab+4b} \ge \frac{1}{3}$$

147. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b+c-1}+\frac{b}{c+a-1}+\frac{c}{a+b-1} \ge 3$

148. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{2b+3c-1}+\frac{b}{2c+3a-1}+\frac{c}{2a+3b-1}\geq\frac{3}{4}$$

149. គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\geq\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

150. បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\geq a+b+c$$

151. បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

152. បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca+abc\geq 4$

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)}\leq\frac{3}{8}$$

153. បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)}\leq\frac{3}{8}$$

154. គេមាន $\mathbf{a , b , c , d}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a+b+c+d)^3 \geq 4\left[a(c+d)^2+b(d+a)^2+c(a+b)^2+d(b+c)^2\right]$$

155. បើ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{abc = 1}$ នោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

156. គេឱ្យ$\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1$$

157. គេឱ្យ$\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b^2+c^2}+\frac{b+c}{c^2+a^2}+\frac{c+a}{a^2+b^2}\right)$$

158. បើ $\mathbf{a , b , c}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន នោះចូរស្រាយថា :

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

159. គេឱ្យ $\mathbf{x , y , z > 0}$ និង $\mathbf{n \in IN}$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(x^{n+3}-x^n+3)(y^{n+3}-y^n+3)(z^{n+3}-z^n+3) \geq (x+y+z)^3$$

160. បើ $\mathbf{a , b , c > -1}$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

161. បើ $\mathbf{a , b , c \in IR}$ បង្ហាញថា : $\sqrt[4]{a^4+b^4+c^4+1} \geq \sqrt[5]{a^5+b^5+c^5+1}$

162. បើ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{xy}{xy+x^2+y^2}+\frac{yz}{yz+y^2+z^2}+\frac{zx}{zx+z^2+x^2}\le\frac{x}{2x+z}+\frac{y}{2y+x}+\frac{z}{2z+y}$$

163. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$$

164. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\ge 2$ ។

165. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\alpha x+\beta-x^{\alpha}$ ដែល $\alpha>0$, $\beta>0$ $\alpha+\beta=1$

ក. គ្រប់ $x\in[0,1]$ បង្ហាញថា $f(x)\ge 0$ ។

ខ. គ្រប់ $u , v>0$ ដែល $u\le v$ បង្ហាញថា $u^{\alpha}.v^{\beta}\le\alpha u+\beta v$ ។

166. គេឱ្យ $a, b , c ,x_1 ,x_2 ,x_3 ,..., x_5$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$a+b+c=1$ និង $x_1.x_2.x_3.x_4.x_5=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(ax_1{}^2+bx_1+c)(ax_2{}^2+bx_2+c)...(ax_5{}^2+bx_5+c)\ge 1$$ ។

167. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC , CA , AB រៀងគ្នាត្រង់

A_1 , B_1 , C_1 ។ស្រាយថា $\sqrt{\frac{AB_1}{AB}}+\sqrt{\frac{BC_1}{BC}}+\sqrt{\frac{CA_1}{CA}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

168. គេឱ្យ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយថា

$$\left(1+\frac{1}{\sin^n x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^n x}\right)>\left(1+2^{\frac{n}{2}}\right)^2 \quad , n\in IN^*$$ ។