រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

Tel: 077 549 491

102

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

102

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

គណៈកម្មការរៀបរៀង និង និពន្ធ

លោក **លឹម ផល្គុន** លោក **យ៉េង ឆារី**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ** លោក **អ៊ឹង សំណាង**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **យ៉េង ឆារី**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ** លោក **ព្រឹម សុខនិត្យ**

លោក **ផល ម៉ុនឆាយ** លោកស្រី **ទុយ រីណា**

អ្នករចនាក្រប

លោក **លឹម ផល្គុន**

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **លឹម ផល្គុន**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិគ្គសិរ** យុវសិស្ស **យន ខ៉ានី**

◇◇◇◇◇☺◇◇◇◇◇

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន ! សៀវភៅដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀងបានប្រមូលផ្តុំនូវលំហាត់ល្អៗផ្នែកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចំនួន 102 លំហាត់យកមកធ្វើដំណោះស្រាយគំរូខ្លីៗ តែច្បាស់លាស់ ដែលអាចធ្វើឲ្យប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាងាយយល់ និងឆាប់ចងចាំអំពីល្បិចដោះស្រាយទាំងនោះ ហើយម្យ៉ាងទៀតលំហាត់ទាំងនេះសុទ្ធតែល្អៗដែលអាច និងចេញប្រឡងនានាដូចជាអាហារូបករណ៍នានា ក៏ដូចជាសិស្សពូកែ ដែលនេះជាចំណុចទាក់ទាញការចាប់អារម្មណ៍របស់យើងខ្ញុំដើម្បីរៀបរៀង និងបោះពុម្ពផ្សព្វផ្សាយសៀវភៅនេះឡើង ។

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីជាជំនួយក្នុងការអានសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងបានបែងចែកសៀវភៅនេះជាបីជំពូក ។ ជំពូកទី១ យើងខ្ញុំបានរំលឹកទ្រឹស្តីនិងរូបមន្តសំខាន់ៗដែលត្រូវយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងដំណោះស្រាយលំហាត់នីមួយៗ ។ ជំពូកទី២ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសចំនួន 102 លំហាត់ និង ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ទាំង 102 ។

ជាចុងបញ្ចប់យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងអាចចូលរួមចំណែកពង្រឹងចំណេះដឹងនិងពង្រីកការចាប់អារម្មណ៍ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យាជាក់ជាមិនខាន។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ១២ ខែធ្នូ ឆ្នាំ ២០១២

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្លុន**

Tel : (017) 768 246

(077) 549 491

ជំពូកទី០១

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

០១-ទ្រឹស្តីបទវិសមភាព

1-វិសមភាព Schur :

គេយក x,y និង z ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $r>0$ គេបាន $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \geq 0$ ។

2-វិសមភាព Cauchy-Schwarz :

គេឲ្យ $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេបាន $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$

3-វិសមភាព AM-GM:

គេឲ្យ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ជា n ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}$ ។

4-វិសមភាព Holder :

គេឲ្យ $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

សន្មតថា $p > 1$ និង $q > 1$ ដែល $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ នោះគេបាន

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

5-វិសមភាព Bernoulli :

ចំពោះគ្រប់ $r \ge 1$ និង $x \ge -1$ គេបាន $(1+x)^r \ge 1 + rx$ ។

6-វិសមភាព Chebyshev:

គេឲ្យចំនួន $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$ និង $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_n$

គេបាន $$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n}{n} \ge \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n}$$

7-វិសមភាព Minkowski :

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ និង $p > 1$ ។

គេបាន $$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ ។

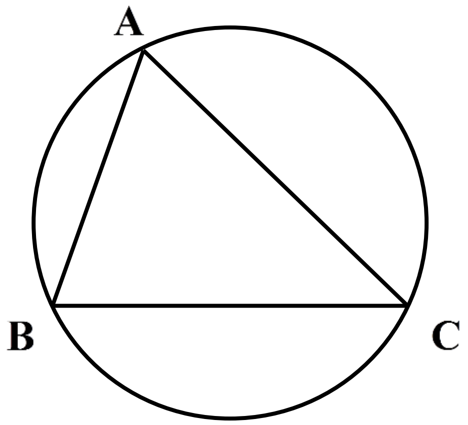
០២-ទ្រឹស្តីបទក្នុងត្រីកោណ

1-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង

$BC = a, AC = b, AB = c$

ចារឹក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។



គេបាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

2-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

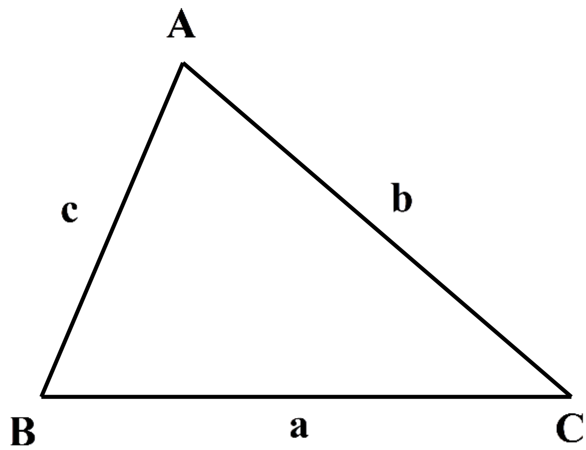
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង

$BC = a, AC = b, AB = c$ គេបាន៖

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

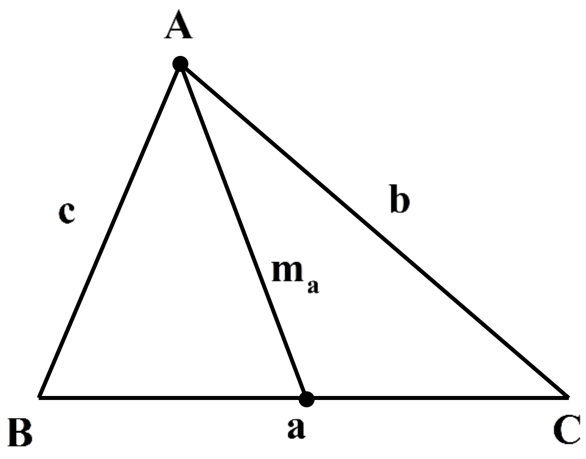


3-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

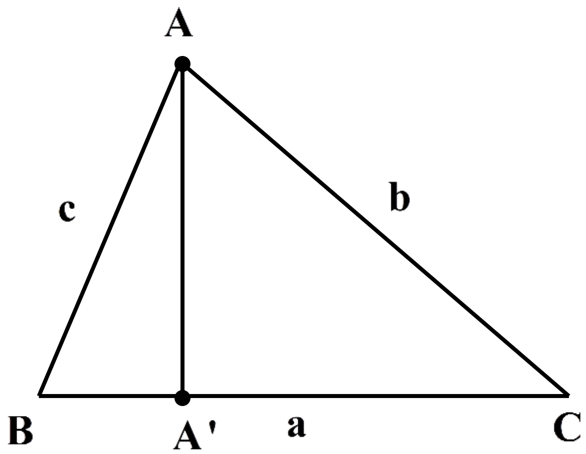


4-ទ្រឹស្តីបទចំណោល

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

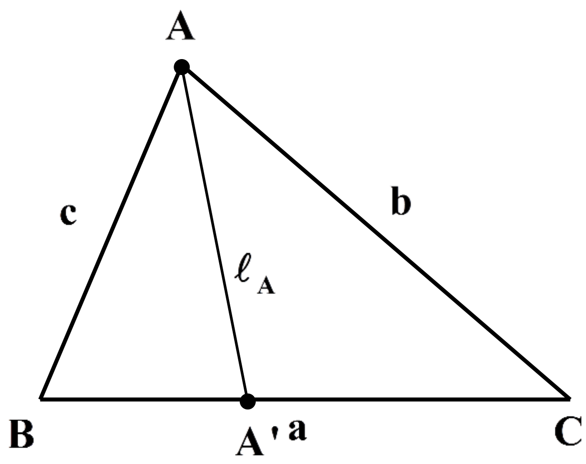


5-រូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

$$\ell_A = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\ell_B = \frac{2ac}{a+c}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\ell_c = \frac{2ab}{a+b}.\cos\frac{C}{2}$$



6-រូបមន្តកន្លះមុំក្នុងត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$

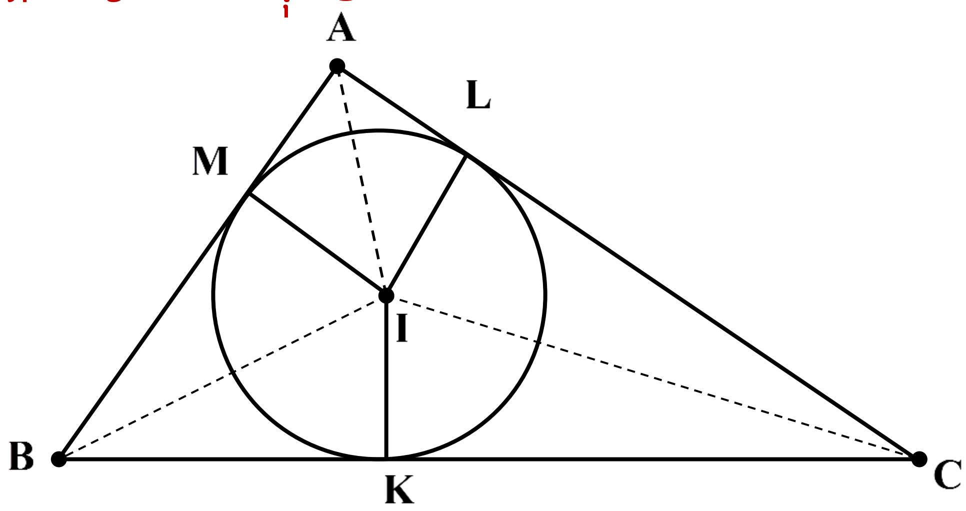
តាង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ,\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

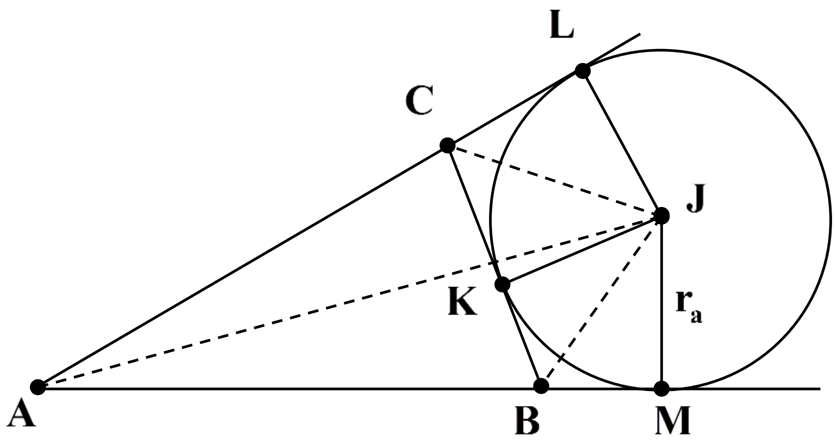
$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ ,\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\ ,\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

7-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ



$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

8-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ



$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

9-រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

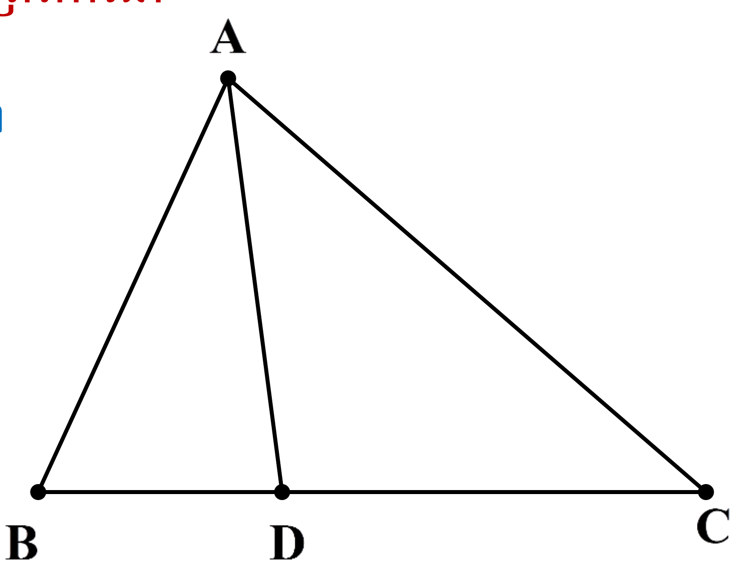
$$= pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{rr_ar_br_c}$$

$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

10-ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

បើ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

គេបាន $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$ ។



11-ទ្រឹស្តីបទLeibnitz

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a,b,c ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន

$$OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$ ។

12-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

P ជាចំណុចមួយនៃ AB ដែល $PA=m\,,PB=n$ និង $m+n=c$ ។

គេបាន $ma^2+nb^2=(m+n).PC^2+mn^2+nm^2$ ។

13-ទ្រឹស្តីបទអឺលែ

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ តាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង៖

[illegible] ។

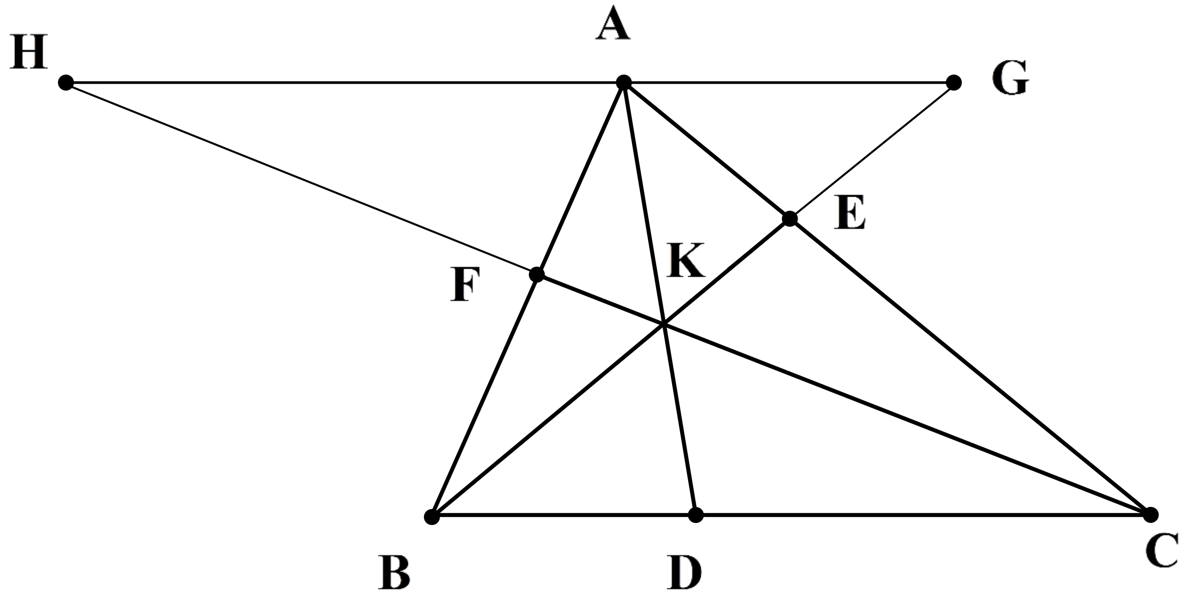
14-ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដែល O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ។ បើ R និង r ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនោះគេបាន $OI^2 = R^2 - 2Rr$

ឬ $d = OI = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

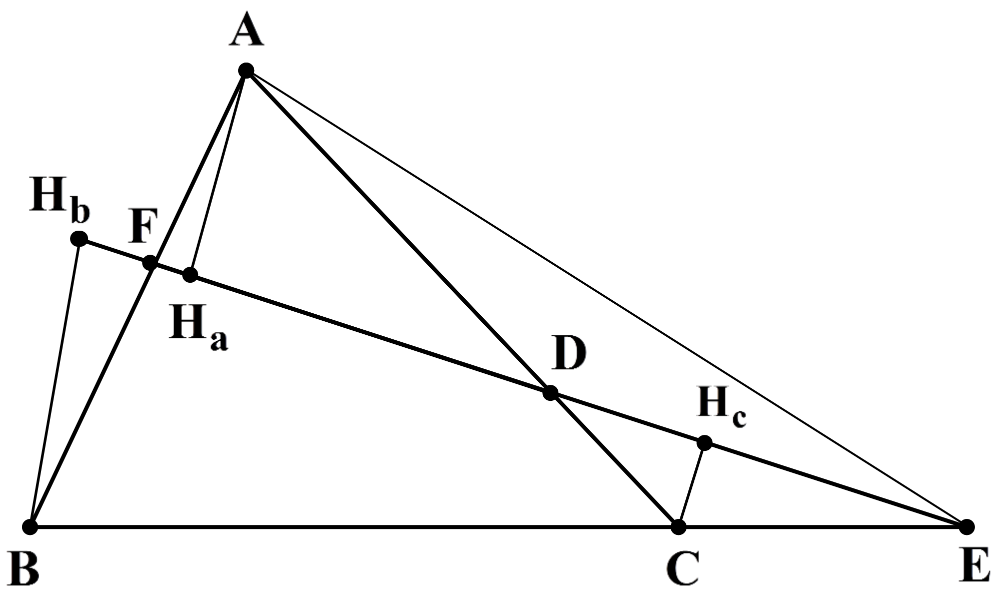
15-ទ្រឹស្តីបទCeva

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ បន្ទាត់បី AD , BE និង CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K មួយលុះត្រាតែ [illegible] ។



16-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus

យកបីចំនុច F, D និង E ស្ថិតរៀងគ្នាលើជ្រុង AB, BC និង AC នៃត្រីកោណ ABC នោះចំណុចបីនេះរត់ត្រង់គ្នាបើ $\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$



០៣-អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1-ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ

ក/ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

ខ/ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

គ/ $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ឃ/ $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

ង/ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

ច/ $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

2-រូបមន្តផលបូក និង ផលដកនៃមុំពីរ

ក/ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

ខ/ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

គ/ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

ឃ/ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ង/ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ច/ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

3-រូបមន្តមុំឌុប និង មុំទ្រីប

ក/$\sin 2a = 2\sin a\cos a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

ខ/$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គ/$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

ឃ/ $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

ង/ $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

ច/ $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

ឆ/$\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

ជ/$\cot 3a = \dfrac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}$

4-រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

ក/$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

ខ/$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$

គ/$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

ឃ/$\sin\beta\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$

5-រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

ក/ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

ខ/ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

គ/ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

ឃ/ $\cos\alpha-\cos\beta=-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

ង/ $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

ច/ $\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

✧✧✧✧✧

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់

1)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

2)គេដឹងថា $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ និង $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

3)គេដឹងថា $\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta$ និង $\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

4)គេដឹងថា $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$ ។

ស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

5)ចូរស្រាយថាបើគេមានសមភាព

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\theta)}{b}=\frac{\cos(x+2\theta)}{c}=\frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$

នោះគេបាន $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$ ។

6)ចូរស្រាយថាបើ $\cos(\theta-\alpha)=a$ និង $\sin(\theta-\beta)=b$

នោះគេបាន $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

7)ដោយដឹងថា $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

8)ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

ខ) គណនា $P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

9)ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា $P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$

10)ក) ចូរស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + ... + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

11)ក) ចូរស្រាយថា $\sin a\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a\sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4} + ... + 2^n\sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

12)ក) ចូរស្រាយថា $\cos a - \cos 3a = 2\sin a\sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a\sin 2a + \sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3} + ... + \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

13)ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a\sin 3a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a\sin 3a + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} + ... + \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

14)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+\dots+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$$

15)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+\dots+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

16)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+\dots+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1}a}$$ ។

17)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}+\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}}+\dots\dots\frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$ ។

18)គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\dots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

19)គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right)=\cos^3 a-3\cos^3\frac{a}{3}+\dots+(-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$$

20)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\cos a\times\cos 2a\times\cos 2^2 a\times\dots\times\cos 2^n a$$

21)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)\dots.(1-\tan^2 2^n a)$$

22)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

23)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)...(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

24)គណនា

$$P_n = (2\cos a-1)(2\cos\frac{a}{2}-1)(2\cos\frac{a}{2^2}-1)...(2\cos\frac{a}{2^n}-1)$$

25)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+\frac{8}{1-3\tan^2 a})(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}})...(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}})$$

26)ក) ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ) ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

27)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)=\frac{1}{16}$$

28)ចូរស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

29)ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^7\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{63}{64}\cos 3x$$

30)គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n=\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}}+\frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}}+\dots+\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

31)ក)ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

32)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

ក)ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ)ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

33)ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x . \tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[2^k \tan \frac{a}{2^k} \tan^2 \frac{a}{2^{k+1}} \right]$

34)ក)ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

ខ)ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{4\cos^2 \frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2 \cos \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{4^n \cos^2 \frac{a}{2^n}}$

35)ក)ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{1}{8} (\tan 3x - 3\tan x)$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1 - 3\tan^2 \frac{a}{3^k}} \right]$

36)ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ [illegible]

ក)គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ)បង្ហាញថា [illegible]

37)ក)ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ)ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

38)ក)ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ)គណនា

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

39)គណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right]$

40)គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

41)គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

42)ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P = (\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o).....(\sqrt{3}+\tan 29^o)$$

43)គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P = (1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

44)គណនា $A = \cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

45)គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

46)គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

47)គេឱ្យ $a\,,b\,,c\,,d$ ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[0;\pi]$

ដោយដឹងថា [illegible]
[illegible]

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$ ។

48)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$$

49)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

50)ចូរស្រាយថា $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$

51)ចូរស្រាយថា $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

52)ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

53)គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\frac{a_n{}^2-5}{2(a_n+2)}$

គ្រប់ $n\geq 0$ ។ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

54)គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ និង $t_{n+1}=\frac{3t_n-t_n^3}{1-3t_n^2}$ ដែល $n\in IN$

ក) ចូរស្រាយថា $t_1=\tan\frac{\pi}{5}$ ។

ខ) គេតាង $t_n=\tan u_n$ ដែល $0<u_n<\frac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

55)គេឲ្យ $P_n = (\cot a + \cot a)(\cot a + \cot 2a)...(\cot a + \cot(na))$

ចូរបង្ហាញថា $P_n = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1} a}$ ។

56)ចូរគណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n} [1 - \tan a \tan(ka)]$ ។

57)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{bc} + \dfrac{b^2}{ca} + \dfrac{c^2}{ab} \geq 4\left(\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

58)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos A}{a^3} + \dfrac{\cos B}{b^3} + \dfrac{\cos C}{c^3} \geq \dfrac{3}{2abc}$ ។

59)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$

60)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a-b}{a+b} = \tan\dfrac{A-B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ រួចសរសេររូបមន្តពីរទៀត

ដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

61)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ រួចទាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

62)គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$

ចូរស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$ ។

63)គេឲ្យ α និង β ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។

64)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$$

65)គេដឹងថា $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

66)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

រួចទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ គេបាន

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

67)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\leq 2$ ។

68)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ ។

69)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមានជ្រុង

$BC=a, AC=b, AB=c$ ។

បើ $a<\frac{b+c}{2}$ នោះបង្ហាញថាមុំ $A<\frac{B+C}{2}$ ។

70)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

តាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ខ)ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$ ។

71)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2\frac{B-C}{2}\geq\frac{2bc}{a^2}$?

72)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A>\frac{\pi}{2}$ ។ តាងជ្រុង

$BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។ ស្រាយថា $|\cos A|\leq\frac{a^6}{54b^3c^3}$?

73)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC

ដែល $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\omega$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថា $\omega\leq\frac{\pi}{6}$ ។

74)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ $a+b=\tan\dfrac{C}{2}\left(a\tan A+b\tan B\right)$ នោះ ABC

ជាត្រីកោណសមបាត ។

75)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។

76)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$$

ដែល a,b,A,B ជាចំនួនពិត ។

ចូរស្រាយថាបើគ្រប់ $x\in IR:\ f(x)\ge 0$ នោះ $a^2+b^2\le 2$

និង $A^2+B^2\le 1$ ។

77)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរស្រាយថា $A\le\frac{\pi}{3}$ លុះត្រាតែ

$(p-b)(p-c)\le\frac{bc}{4}$ ដែល a,b,c ជាជ្រុង និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

78)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

79)ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$

80)ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\,\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\,\cos^2 x=0$$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

81)គេឲ្យសមីការ $(E):\ \cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫស ។

82)គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR

ដោយ $f(0)=0$ និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?

83)គេមានស៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\sin a)x_n+\dfrac{1}{2}(1+\cos a)y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\cos a)x_n+\dfrac{1}{2}(\sin a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ និង $n=0,1,2,...$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ តាង [illegible] និង

[illegible] ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

84)គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

85)គេឱ្យ $A;B;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ [illegible]

86)គេឱ្យ $A;B;C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា [illegible]

87)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq$ [illegible]

88)គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

[illegible] ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

89)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

[illegible]

90)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា [illegible]

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា [illegible]

91)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ តាង r និង R

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔAB ។

ក. ចូស្រាយថា [illegible]

$$\frac{\cot A}{a}+\frac{\cot B}{b}+\frac{\cot C}{c}=\text{[illegible]}$$

$$\cot A+\cot B+\cot C \text{ [illegible]}$$

ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2$ [illegible] ។

(A,B,C ជាមុំស្រួច)

92)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ ។

93)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

94)គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan x+\tan y+\tan z\ge 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ ។

95)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$?

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

96)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2+b^2+c^2\geq (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S \ ?$$

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

97)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានផ្ទៃក្រលា S ។

AK, BL, CM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A,B,C រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S}\geq 3\sqrt{3}$ ។

98)គេឱ្យ **a; b;c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា៖

[illegible]

99)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$

100)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geq \cot A+\cot B+\cot C$$

101)ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា $\cos\frac{B-C}{2}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅΔABC ។

102)ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4$$

◇◇◇☺☺◇◇◇

ជំពូកទី០៣

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

តាង $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{4\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{8\pi}{7}$

$$A=x_1+x_2+x_3\ ,\ B=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\ ,\ C=x_1x_2x_3$$

$$S=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}\ ,\ T=\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_3}$$

ជាដំបូងយើងត្រូវគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ A,B,C ។

គណនា $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្តបម្លែងមុំ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

គេមាន $\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})=-\cos\frac{5\pi}{7}\\ \cos\frac{4\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})=-\cos\frac{3\pi}{7}\\ \cos\frac{8\pi}{7}=\cos(\pi+\frac{\pi}{7})=-\cos\frac{\pi}{7}\end{cases}$

គេបាន $A=-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញបាន $A=-\frac{1}{2}$

គណនា $B=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a+b)\right]$

$$B=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

ដោយ $\begin{cases}\cos\frac{6\pi}{7}=\cos(2\pi-\frac{8\pi}{7})=\cos\frac{8\pi}{7}\\ \cos\frac{12\pi}{7}=\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})=\cos\frac{2\pi}{7}\\ \cos\frac{10\pi}{7}=\cos(2\pi-\frac{4\pi}{7})=\cos\frac{4\pi}{7}\end{cases}$

$$B=\frac{1}{2}(\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7})+\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7})+\frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7})$$

$$B=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=A=-\frac{1}{2}$$

គណនា $C=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$ នោះ $\cos a=\frac{\sin 2a}{2\sin a}$

គេបាន $C=\dfrac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\times\dfrac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{4\pi}{7}}\times\dfrac{\sin\frac{16\pi}{7}}{2\sin\frac{8\pi}{7}}=\dfrac{1}{8}.\dfrac{\sin\frac{16\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$

ដោយ $\sin\dfrac{16\pi}{7}=\sin(2\pi+\dfrac{2\pi}{7})=\sin\dfrac{2\pi}{7}$ នោះ $C=\dfrac{1}{8}$

ហេតុនេះគេបាន $A=-\dfrac{1}{2}\,,B=-\dfrac{1}{2}\,,C=\dfrac{1}{8}$ ។

ដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព ៖

$$(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

តាម $S=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}\,,T=\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_3}$

គេបាន $S^3=A+3S.T-3\sqrt[3]{C}=-\dfrac{1}{2}+3ST-\dfrac{3}{2}=3ST-2$

$$T^3=B+3T(\sqrt[3]{x_1{}^2x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_2{}^2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_2x_3{}^2})-3\sqrt[3]{C^2}$$

$$T^3=-\frac{1}{2}+3T\sqrt[3]{x_1x_2x_3}(\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3})-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}ST-\frac{5}{4}$$

គេបាន $S^3T^3=(3ST-2)(\dfrac{3}{2}ST-\dfrac{3}{4})=\dfrac{(3ST-2)(6ST-5)}{4}$

ឬ $4S^3T^3-18S^2T^2+27ST-10=0$ តាង $u=S.T$

គេបាន $4u^3-18u^2+27u-10=0$ ឬ $8u^3-36u^2+54u-20=0$

ឬ $(2u-3)^3+7=0$ នាំឲ្យគេទាញ $u=S.T=\dfrac{3-\sqrt[3]{7}}{2}$

ហើយ $S^3=3S.T-2=3\times\dfrac{3-\sqrt[3]{7}}{2}-2=\dfrac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}$

ដូចនេះ $S=\sqrt[3]{\cos\dfrac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\dfrac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\dfrac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី០២

គេដឹងថា $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}$ និង $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{c}{d}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

គេមាន $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}\quad(1)$ និង $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{c}{d}\quad(2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd}\quad(3)$$

តាម (2) គេទាញ $\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{d}{c}\quad(4)$

បូកសមីការ (1) និង (4) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{a}{b}+\frac{d}{c}$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\alpha)+\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)\cos(-\alpha+\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}\quad(5)$$

ធ្វើផលធៀបរវាង (5) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{d}{c}\times\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

ឬ $$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{c}{d}\cdot\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

យក (2) ជួសក្នុង (6) គេបាន ៖

$$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}\cdot\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

$$\cos(-\alpha+\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

ដូចនេះ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

លំហាត់ទី០៣

គេដឹងថា $\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta$ និង $\sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$

តាមបម្រាប់គេមាន $\sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

នាំឲ្យ $\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} = (1-\cos\varphi)(1-\cos\theta)$

ដោយ $\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta$ នោះ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} \\ \cos\theta = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \end{cases}$

គេបាន $\sin^2\alpha = (1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta})(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma})$

$$1-\cos^2\alpha = 1-\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha + \frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}\cos^2\alpha$$

$$\left(1+\frac{1}{\cos\gamma\cos\beta}\right)\cos^2\alpha=\frac{\cos\gamma+\cos\beta}{\cos\gamma\cos\beta}\cos\alpha$$

ដោយសន្មតថា $\cos\alpha\neq 0$ នោះគេទាញបាន ៖

$$\cos\alpha=\frac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}\quad(1)$$

គេមាន $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\quad(2)$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}}=\frac{1+\cos\gamma\cos\beta-\cos\gamma-\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta+\cos\gamma+\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\gamma)-\cos\beta(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\gamma)+\cos\beta(1+\cos\gamma)}=\frac{(1-\cos\gamma)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\gamma)(1+\cos\beta)}$$

$$=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}\times\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\tan^2\frac{\gamma}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

លំហាត់ទី០៤

គេដឹងថា $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\beta}{2}$, $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\beta}{2}$, $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\tan^2\dfrac{\beta}{2}=\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}.\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$ ។

គេមាន $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

និង $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

គេបាន $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

ដោយ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ (ព្រោះ: $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$)

គេបាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1-\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\times\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

តាង $a=\cos\alpha$ និង $b=\cos\beta$ គេបាន ៖

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\frac{1-ab}{1+ab}-\frac{1-a}{1+a}}{1-\frac{1-ab}{1+ab}\times\frac{1-a}{1+a}}$$

$$=\frac{(1-ab)(1+a)-(1+ab)(1-a)}{(1+ab)(1+a)-(1-ab)(1-a)}$$

$$=\frac{1+a-ab-a^2b-1+a-ab+a^2b}{1+a+ab+a^2b-1+a+ab-a^2b}$$

$$=\frac{2a-2ab}{2a+2ab}=\frac{1-b}{1+b}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ទី០៥

ចូរស្រាយថាបើ $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\theta)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\theta)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\theta)}{d}$

នោះគេបាន $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\theta)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\theta)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\theta)}{d}=\dfrac{1}{t}$

គេទាញ $\begin{cases} a=t\cos x \\ b=t\cos(x+\theta) \\ c=t\cos(x+2\theta) \\ d=t\cos(x+3\theta) \end{cases}$

$$a+c=t\left[\cos x+\cos(x+2\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+\theta)=2b\cos\theta$$

$$b+d=t\left[\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+2\theta)=2c\cos\theta$$

គេបាន $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2b\cos\theta}{2c\cos\theta}=\dfrac{b}{c}$ សមមូល $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

លំហាត់ទី០៦

ចូរស្រាយថាបើ $\cos(\theta-\alpha)=a$ និង $\sin(\theta-\beta)=b$

នោះគេបាន $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$

គេមាន $\begin{cases}\cos(\theta-\alpha)=a\\ \sin(\theta-\beta)=b\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a & (1)\\ \sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta=b & (2)\end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង $\sin\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $\cos\alpha$ រួចធ្វើ

ផលបូកគេបាន $\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha$

នាំឲ្យ $\sin^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2 \quad (3)$

គុណសមីការ (1) នឹង $\cos\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $-\sin\alpha$ រួចធ្វើ

ផលបូកគេបាន $\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha$

នាំឲ្យ $\cos^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)$$

ដូចនេះ $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

លំហាត់ទី០៧

ដោយដឹងថា $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

គេមាន $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

គេបាន $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}$

តាមរូបមន្ត $\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

និង $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)}{2}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$$\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\frac{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)}{2}\quad(2)$$

$$\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\frac{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)}{2}\quad(3)$$

ធ្វើផលបូក (1) , (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$ ។

លំហាត់ទី០៨

ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

ខ) គណនា $P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

គេមាន ៖

$$\cos(45^o-\alpha)=\cos 45^o\cos\alpha+\sin 45^o\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\tan\alpha)$$

នាំឲ្យ $\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}=1+\tan\alpha$ ។

ដូចនេះ: $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ ។

ខ) គណនា $P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

តាមសមភាព $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} 1+\tan 1^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 44^0}{\cos 1^o} \\ 1+\tan 2^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 43^o}{\cos 2^o} \\ 1+\tan 3^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 42^o}{\cos 3^o} \\ -------------- \\ 1+\tan 45^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 0^o}{\cos 45^o} \end{cases}$$

គុណសមភាពនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$P=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{45}\cos 0^o}{\cos 45^o}=\left(\sqrt{[illegible]}\right)^{4[illegible]}=2^{[illegible]}$$ ([illegible]ព្រោះ $\cos 45^o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

ដូចនេះ $P=2^{23}=8388608$ ។

លំហាត់ទី០៩

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា $P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

គេមាន $1+\cot\alpha = 1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ដោយ $\sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45^o+\alpha) = \sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)$

ដូចនេះ $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ ។

ខ) គណនា $P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$

ដោយប្រើសមភាព $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ គេបាន ៖

$$P=\left(\sqrt{2}\right)^{134} = 2^{67} = 147573952589676412928$$ ។

លំហាត់ទី១០

ក) ចូរស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + \ldots + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

តាមរូបមន្ត $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin\frac{3a-a}{2}\cos\frac{3a+a}{2} = 2\sin a\cos 2a$

ដូចនេះ $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + \ldots + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin a \cos 2a$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k} = 2\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k}$

ឬ $\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k}\right)$

ចំពោះ $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} \sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \\ \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}(\sin x - \sin\frac{x}{3}) \\ ---------------------- \\ \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n} = \frac{1}{2}(\sin\frac{x}{3^{n-1}} - \sin\frac{x}{3^n}) \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$S = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin\frac{x}{3^n})$ ។

លំហាត់ទី១១

ក) ចូរស្រាយថា $\sin a \sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4}+....+2^n\sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin a \sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$

គេបាន $2\sin a-\sin 2a=2\sin a-2\sin a\cos a$

$$=2\sin a(1-\cos a)$$

$$=2\sin a(2\sin^2\frac{a}{2})$$

$$=4\sin a\sin^2\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\sin a \sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{4} + \dots + 2^n \sin\frac{a}{2^n}\cos^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(2^k \sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}\right)$$

គេមាន $\sin a \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន ៖

$$\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\left(2\sin\frac{a}{2^k} - \sin\frac{a}{2^{k-1}}\right)$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2^k ៖

$$2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k} - 2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})$$

គេបាន $S = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k} - 2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}}) = \frac{1}{4}(2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n} - \sin 2a)$

ដូចនេះ: $S = \frac{1}{4}\left(\sin\frac{a}{2^{n+1}} - \sin 2a\right)$ ។

លំហាត់ទី១២

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 2a+\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}+....+\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

តាមរូបមន្ត $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\cos a-\cos 3a=-2\sin\frac{a-3a}{2}\sin\frac{a+3a}{2}$

$$=-2\sin(-a)\sin 2a$$

$$=2\sin a\sin 2a$$

ដូចនេះ $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 2a+\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}+....+\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $\cos\frac{a}{3^k}-\cos\frac{a}{3^{k-1}}=2\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k}$

គេទាញ $\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^k}-\cos\frac{a}{3^{k-1}})$

បើ $k=0:\sin a\sin 2a=\frac{1}{2}(\cos a-\cos 3a)$

បើ $k=1:\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3}-\cos a)$

បើ $k=2:\sin\frac{a}{3^2}\sin\frac{2a}{3^2}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^2}-\cos\frac{a}{3})$

បើ $k=n:\ \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n}-\cos\frac{a}{3^{n-1}})$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n}-\cos 3a)$ ។

លំហាត់ទី១៣

ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 3a + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} + ... + \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

គេមាន $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ និង $\cos^2 2a = \dfrac{1+\cos 4a}{2}$

គេបាន $\cos^2 a - \cos^2 2a = \dfrac{1+\cos 2a}{2} - \dfrac{1+\cos 4a}{2}$

$$= \frac{\cos 2a - \cos 4a}{2}$$

$$= -\sin\frac{2a-4a}{2}\sin\frac{2a+4a}{2} = \sin a \sin 3a$$

ដូចនេះ $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 3a + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} + ... + \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន $\cos^2\frac{a}{2^k} - \cos^2\frac{a}{2^{k-1}} = \sin\frac{a}{2^k}\sin\frac{3a}{2^k}$

ចំពោះ $k = 0 : \sin a \sin 3a = \cos^2 a - \cos^2 2a$

ចំពោះ $k = 1 : \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} = \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2 a$

ចំពោះ $k = 2 : \sin\frac{a}{2^2}\sin\frac{3a}{2^2} = \cos^2\frac{a}{2^2} - \cos^2\frac{a}{2}$

ចំពោះ $k = n : \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n} = \cos^2\frac{a}{2^n} - \cos^2\frac{a}{2^{n-1}}$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

ដូចនេះ $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

លំហាត់ទី១៤

ក) ចូរស្រាយថា $$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+\dots+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$$

គេមាន $$\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}=\frac{2-2\cos a}{\sin 2a}$$

$$=\frac{2(1-\cos a)}{\sin 2a}=\frac{4\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}$$

ដូចនេះ: $$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$$ ។

ខ)គណនា $S=\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\dfrac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\dfrac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+....+\dfrac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $2^k a$ គេបាន $\dfrac{\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^k a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2^{k+1}a}-\dfrac{1}{\sin 2^k a}\right)$

ហេតុនេះ $\dfrac{2^k\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^{k+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{k+1}}{\sin 2^{k+1}a}-\dfrac{2^k}{\sin 2^k a}\right)$

ចំពោះ $k=0:\ \dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ចំពោះ $k=1:\ \dfrac{\sin^2 a}{\sin 2^2 a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^2}{\sin 2^2 a}-\dfrac{2}{\sin 2a}\right)$

ចំពោះ $k=n:\ \dfrac{\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{2^n}{\sin 2^n a}\right)$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៥

ក) ចូរស្រាយថា $$\frac{\cos 2a}{\sin 3a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin 3a}\right)$$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+\dots+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $$\frac{\cos 2a}{\sin 3a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin 3a}\right)$$

គេមាន $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$

គេបាន $$\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin 3a}=\frac{(3-4\sin^2 a)-1}{\sin 3a}=\frac{2(1-2\sin^2 a)}{\sin 3a}$$

ដោយ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

ដូចនេះ: $$\frac{\cos 2a}{\sin 3a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin a}-\frac{1}{\sin 3a}\right)$$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n = \frac{\cos 2a}{\sin 3a} + \frac{\cos \frac{2a}{3}}{\sin a} + \frac{\cos \frac{2a}{3^2}}{\sin \frac{a}{3}} + \dots + \frac{\cos \frac{2a}{3^n}}{\sin \frac{a}{3^{n-1}}}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\frac{\cos 2a}{\sin 3a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin a} - \frac{1}{\sin 3a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $\frac{\cos \frac{2a}{3^k}}{\sin \frac{a}{3^{k-1}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \frac{a}{3^k}} - \frac{1}{\sin \frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos \frac{2a}{3^k}}{\sin \frac{a}{3^{k-1}}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sin \frac{a}{3^k}} - \frac{1}{\sin \frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \frac{a}{3^n}} - \frac{1}{\sin 3a}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៦

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a} - \frac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n = \frac{\sin^2 a}{\cos 3a} + \frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a} + \frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a} + ... + \frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a} - \frac{1}{\cos a}\right)$

គេមាន $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a = \cos a(4\cos^2 a - 3)$

គេបាន $\frac{1}{\cos 3a} - \frac{1}{\cos a} = \frac{1-(4\cos^2 a - 3)}{\cos 3a} = \frac{4(1-\cos^2 a)}{\cos 3a}$

ដោយ $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$ គេបាន $\frac{1}{\cos 3a} - \frac{1}{\cos a} = \frac{4\sin^2 a}{\cos 3a}$

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a} - \frac{1}{\cos a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

គេមាន $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $3^k a$

គេបាន $\frac{\sin^2 3^k a}{\cos 3^{k+1} a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{k+1} a}-\frac{1}{\cos 3^k a}\right)$

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\cos 3^{k+1} a}-\frac{1}{\cos 3^k a}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1} a}-\frac{1}{\cos a}\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1} a}-\frac{1}{\cos a}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៧

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}+\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}}+\dots\dots\frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

គេបាន $\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}=\dfrac{3-(3-4\sin^2 a)}{\sin 3a}=\dfrac{4\sin^2 a}{\sin 3a}$

ដោយ $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$

$$=\sin a\left[1+2(1-2\sin^2 a)\right]=\sin a(1+2\cos a)$$

ដូចនេះ: $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n = \frac{\sin a}{1+2\cos 2a} + \frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}} + \ldots\ldots \frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$

គេមាន $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a} - \frac{1}{\sin a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$

រួចគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{3^k}$ គេបាន ៖

$$\frac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}} - \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}} - \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a} - \frac{1}{3^n\sin\frac{a}{3^n}}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៨

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\ldots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\ldots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

នោះគេទាញ $\sin^3 x=\frac{1}{4}\left(3\sin x-\sin 3x\right)$

គេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4\cdot 3^k}\left(3\sin 3^k a-\sin 3^{k+1}a\right)\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\sin 3^k a-\frac{1}{3^k}\sin 3^{k+1}a\right)$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left(3\sin a-\frac{1}{3^n}\sin 3^{n+1}a\right)$ ។

លំហាត់ទី១៩

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k \cos^3 \frac{a}{3^k}\right) = \cos^3 a - 3\cos^3 \frac{a}{3} + \dots + (-3)^k \cos^3 \frac{a}{3^k}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k \cos^3 \frac{a}{3^k}\right) = \cos^3 a - 3\cos^3 \frac{a}{3} + \dots + (-3)^k \cos^3 \frac{a}{3^k}$$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

នោះគេទាញ $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k \cos^3 \frac{a}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[(-3)^k \cos\frac{a}{3^{k-1}} - (-3)^{k+1}\cos\frac{a}{3^k}\right]$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left[\cos 3a - (-3)^{n+1}\cos\frac{a}{3^n}\right]$ ។

លំហាត់ទី២០

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = \cos a \times \cos 2a \times \cos 2^2 a \times \ldots \times \cos 2^n a$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម

$$P_n = \cos a \times \cos 2a \times \cos 2^2 a \times \ldots \times \cos 2^n a$$

តាមរូបមន្ត $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

គេទាញ $\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$

គេបាន $P_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2a}{\sin a}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4a}{\sin 2a}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 8a}{\sin 4a}\times\ldots\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{n+1}a}{\sin 2^n a}$

ដូចនេះ $P_n = \frac{1}{2^n}\times\frac{\sin 2^{n+1}a}{\sin a}$

លំហាត់ទី២១

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)....(1-\tan^2 2^n a)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)....(1-\tan^2 2^n a)$$

តាមរូបមន្ត $\tan 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$

គេទាញ $1-\tan^2\varphi=2\times\dfrac{\tan\varphi}{\tan 2\varphi}$

គេបាន $P_n=2.\dfrac{\tan a}{\tan 2a}\times 2.\dfrac{\tan 2a}{\tan 4a}\times 2.\dfrac{\tan 4a}{\tan 8a}\times ...\times 2.\dfrac{\tan 2^n a}{\tan 2^{n+1}a}$

ដូចនេះ $P_n=2^n\times\dfrac{\tan a}{\tan 2^{n+1}a}$ ។

លំហាត់ទី២២

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = \sin\varphi(3-4\sin^2\varphi)$

ដោយ $3-4\sin^2\varphi = 1+2(1-2\sin^2\varphi) = 1+2\cos 2\varphi$

គេទាញ $1+2\cos 2\varphi = \dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$

គេបាន $P_n = \dfrac{\sin 3a}{\sin a} \times \dfrac{\sin a}{\sin\frac{a}{3}} \times \dfrac{\sin\frac{a}{3}}{\sin\frac{a}{3^2}} \times .... \times \dfrac{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}{\sin\frac{a}{3^n}} = \dfrac{\sin 3a}{\sin\frac{a}{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)...(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)...(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

តាមរូបមន្ត $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi=\cos\varphi(4\cos^2\varphi-3)$

ដោយ $4\cos^2\varphi-3=2(2\cos^2\varphi-1)-1=2\cos 2\varphi-1$

គេទាញ $2\cos 2\varphi-1=\dfrac{\cos 3\varphi}{\cos\varphi}$

គេបាន $P_n=\dfrac{\cos 3a}{\cos a}\times\dfrac{\cos a}{\cos\frac{a}{3}}\times\dfrac{\cos\frac{a}{3}}{\cos\frac{a}{3^2}}\times....\times\dfrac{\cos\frac{a}{3^{n-1}}}{\cos\frac{a}{3^n}}=\dfrac{\cos 3a}{\cos\frac{a}{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គណនា $P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1)...(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1)...(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

តាមរូបមន្ត $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ នោះ $2\cos 2\varphi = 4\cos^2\varphi - 2$

គេទាញ $2\cos 2\varphi + 1 = 4\cos^2\varphi - 1 = (2\cos\varphi - 1)(2\cos\varphi + 1)$

នាំឲ្យ $2\cos\varphi - 1 = \dfrac{2\cos 2\varphi + 1}{2\cos\varphi + 1}$ ។ កន្សោម P_n អាចសរសេរ ៖

$$P_n = \frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1} \times \frac{2\cos a + 1}{2\cos\frac{a}{2} + 1} \times \frac{2\cos\frac{a}{2} + 1}{2\cos\frac{a}{2^2} + 1} \times ... \times \frac{2\cos\frac{a}{2^{n-1}} + 1}{2\cos\frac{a}{2^n} + 1}$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{2\cos 2a + 1}{2\cos\frac{a}{2^n} + 1}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a})(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}})...(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a})(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}})...(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}})$$

តាមរូបមន្ត $\tan 3a=\dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}=\dfrac{\tan a(3-\tan^2 a)}{1-3\tan^2 a}$

គេទាញ $\dfrac{\tan 3a}{\tan a}=\dfrac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}-\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{8}{3(1-3\tan^2 a)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}\right)$$

នាំឲ្យ $1+\dfrac{8}{1-3\tan^2 a}=\dfrac{3\tan 3a}{\tan a}$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}=\frac{3\tan\frac{a}{3^{k-1}}}{\tan\frac{a}{3^k}}$

ចំពោះ $k=0:1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}=\frac{3\tan 3a}{\tan a}$

ចំពោះ $k=1:1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}}=\frac{3\tan a}{\tan\frac{a}{3}}$

ចំពោះ $k=2\ :\ 1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^2}}=\frac{3\tan\frac{a}{3}}{\tan\frac{a}{3^2}}$

ចំពោះ $k=n:1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}}=\frac{3\tan\frac{a}{3^{n-1}}}{\tan\frac{a}{3^n}}$

គុណទំនាក់ទំនងខាងលើអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$P_n=\frac{3^n\tan 3a}{\tan\frac{a}{3^n}}=3^n\tan 3a\cot\frac{a}{3^n}$$ ។

លំហាត់ទី២៦

ក) ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ) ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។ ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ: $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ) ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន $f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2\le 0$$

ដូចនេះ: $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)=\frac{1}{16}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

តាង $P=\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)$

$$=\prod_{n=0}^{3}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)\right]$$

គេមាន $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}+1-2\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(3-4\sin^2\frac{a}{2}\right)$

ហើយ $\sin\frac{3a}{2}=3\sin\frac{a}{2}-4\sin^3\frac{a}{2}=\sin\frac{a}{2}\left(3-4\sin^2\frac{a}{2}\right)$

នាំឱ្យ $3-4\sin^2\frac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

យក $a=\frac{3^n\pi}{20}$ គេបាន $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}$

គេបាន $P=\prod_{n=0}^{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}\right)=\frac{1}{16}.\frac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}=\frac{1}{16}$

ព្រោះ $\sin\frac{81\pi}{40}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{40})=\sin\frac{\pi}{40}$ ។

ដូចនេះ

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$ ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

តាង $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

យើងបាន $S=\dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\dfrac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\dfrac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

តាង $T=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

$$=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi+\frac{\pi}{7})$$

$$=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញបាន $T=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$

ដូចនេះ: $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$ (i)

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន៖

$$\cos^n x=\frac{3}{4}\cos^{n-2} x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3} x \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន៖

$$\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3})\quad(2)$$

$$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3})\quad(3)$$

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន៖

$$E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_{n-3}(x)\quad(ii)$$

តាម (i) ចំពោះ $n=0\,;n=1\,,n=2$ គេបាន៖

$$E_0(x)=3$$

$$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$

$$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x$$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3\,;n=4\,,n=5\,;n=7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី៣០

គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + \dots + \frac{\tan\frac{\pi}{2^n}}{\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $\tan 2x - \tan x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x = \frac{\tan x + \tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

$$\tan 2x - \tan x = \tan x . \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

ដោយ $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

នោះ $\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$ (*)

ដោយជ្រើសរើស $x = \dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ ជួសក្នុង (*)

គេបាន $\tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}} = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} ([illegible])$

$= (\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{8}) + (\tan\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{16}) + \dots + ([illegible])$

$= \tan\frac{\pi}{4} - [illegible]$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \tan\frac{\pi}{2^{[illegible]}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\lim\limits_{n \to \infty} \tan\frac{\pi}{[illegible]} = [illegible]$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = [illegible]$ ។

លំហាត់ទី៣១

ក)ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k \tan^3 \frac{a}{2^n}}{1-\tan^2 \frac{a}{2^n}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

យើងបាន $\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x=\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}\right)$

គេមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ យក $x=\dfrac{a}{2^k}$

គេបាន $\dfrac{\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2^{k-1}}-\tan\dfrac{a}{2^k}$

យើងបាន៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{k-1}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-2^k\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\dfrac{a}{2^n}$

លំហាត់ទី៣២

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ) ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

តាង $f(x) = \cot x - \cot 2x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$ ។

ខ)គណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sin \frac{a}{2^k}} \right)$

ដោយ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\cot \frac{a}{2^{k+1}} - \cot \frac{a}{2^k} \right)$$

$$= \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ $S_n = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$ ។

លំហាត់ទី៣៣

ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

តាង $f(x) = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $f(x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x + 2\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.\tan^2 x = \tan 2x.\tan^2 x$$

ដូចនេះ $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

យើងមាន $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ដោយយក $x = \frac{a}{2^{k+1}}$

គេបាន $\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}} = \tan\frac{a}{2^k} - 2\tan\frac{a}{2^{k+1}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\tan\frac{a}{2^k} - 2^{k+1}\tan\frac{a}{2^{k+1}}\right) = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right] = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$ ។

លំហាត់ទី៣៤

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

ខ)ចូរគណនា $S_n = \dfrac{1}{4\cos^2 \frac{a}{2}} + \dfrac{1}{4^2 \cos \frac{a}{2^2}} + ... + \dfrac{1}{4^n \cos^2 \frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

យើងមាន

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

ដូចនេះ: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$ ។

ខ) គណនាផលបូក៖

$$S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^k}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2^k}}\right)$

ដោយ $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

គេបាន ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k}\left(\frac{4}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{4^k}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2 \frac{a}{3^k}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

តាមរូបមន្ត $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

យើងបាន $\tan 3x - 3\tan x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} - 3\tan x = \dfrac{8\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

ដូចនេះ: $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1 - 3\tan^2 \frac{a}{3^k}} \right]$

យើងមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ដោយយក $x = \dfrac{a}{3^k}$

គេបាន $\dfrac{\tan^3 \frac{a}{3^k}}{1 - 3\tan^2 \frac{a}{3^k}} = \dfrac{1}{8}\left(\tan \dfrac{a}{3^{k-1}} - 3\tan \dfrac{a}{3^k}\right)$

យើងបាន

$$S_n = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}\left(3^k \tan \frac{a}{3^{k-1}} - 3^{k+1}\tan \frac{a}{3^k}\right) = \frac{1}{8}\left(\tan 3a - 3^{n+1}\tan \frac{a}{3^n}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\tan 3a}{8} - \dfrac{3^{n+1}}{8}\tan \dfrac{a}{3^n}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឱ្យ $S_n = \cos\frac{n\pi}{12} + \sin\frac{n\pi}{12}$

ក)គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ)បង្ហាញថា [illegible]

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ [illegible] ។

ខ)បង្ហាញថា [illegible]

គេមាន [illegible]

តាង [illegible] នោះ [illegible]

គេមាន [illegible]

ហើយ [illegible]

គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

ឬ $4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0$

គេទាញ $\begin{cases} 4x_1^2 - 2\sqrt{6}x_1 + 1 = 0 \\ 4x_2^2 - 2\sqrt{6}x_2 + 1 = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 4x_1^{n+2} - 2\sqrt{6}x_1^{n+1} + x_1^{n} = 0 \quad (i) \\ 4x_2^{n+2} - 2\sqrt{6}x_2^{n+1} + x_2^{n} = 0 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$$

ដូចនេះ $4S_{n+2} = 2\sqrt{6}S_{n+1} - S_n$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ក)ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ)ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

យើងមាន $\cos(n+1)x=\cos(nx+x)$

ឬ $\cos(n+1)x=\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1}x$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)\cos x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\sin(nx)\sin x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}-\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}.\tan x$$

នាំឲ្យ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\frac{1}{\tan x}$

ដូចនេះ $$\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$$ ។

ខ.គណនា $$S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$$

យើងបាន $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}\right]$$

ដោយ $$\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}=\left[\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1}x}-\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right].\cot x$$

$$S_n=\cot x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1}x}-\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right)=\cot x\left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-1\right)$$

ដូចនេះ $$S_n=\frac{\cot x[\cos(n+1)x-\cos^{n+1}x]}{\cos^{n+1}x}$$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ក) ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ) គណនា $P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

យើងតាង $A(x)=1+\frac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x+1}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\cos x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin x}{\cos x}=\tan\frac{x}{2}\tan x=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$ ។

ខ)គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

$$=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}}\right)=\prod_{k=0}^{n}[\frac{\cot\frac{a}{2^{k+1}}}{\cot\frac{a}{2^k}}]$$

ដូចនេះ $P_n=\tan\frac{a}{2^{n+1}}.\cot a$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គណនាផលគុណខាងក្រោមនេះ

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \quad \text{ដែល } |x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\cos 2a = \dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គេបាន $\cos 2^{k+1}x = \dfrac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k = \dfrac{\cos^2 2^k - \sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x} = \dfrac{\cos 2^{k+1}x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\dfrac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2} = \dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}$

ដូចនេះ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}\right) = \dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1}x}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k} - \sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\dfrac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ៖ $P_n = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x . \tan^2\frac{x}{2} . \tan^4\frac{x}{4} ..... \tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \dfrac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a = \dfrac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\dfrac{x}{2^k} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2^k}}{\sin\dfrac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k} . \frac{\sin^{2^{k+1}}\dfrac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\dfrac{2x}{2^k}}\right) = 2^{2^{n+1}-1} . \frac{\sin^{2^{n+1}}\dfrac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n = 2^{(2^{n+1}-1)} . \dfrac{\sin^{2^{n+1}}\dfrac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃផលគុណ $P=\prod_{k=1}^{29}\left(\sqrt{3}+\tan k^{o}\right)$

គេមាន $\sqrt{3}+\tan k^{o}=\sqrt{3}+\dfrac{\sin k^{o}}{\cos k^{o}}=\dfrac{\sqrt{3}\cos k^{o}+\sin k^{o}}{\cos k^{o}}$

$$=\frac{2\cos(30^{o}-k^{o})}{\cos k^{o}}$$

គេបាន $P=\prod_{k=1}^{29}\left[\dfrac{2\cos(30^{o}-k^{o})}{\cos k^{o}}\right]$

$$=\frac{2^{29}\cos 29^{o}\cos 28^{o}.....\cos 2^{o}\cos 1^{o}}{\cos 1^{o}\cos 2^{o}.....\cos 28^{o}\cos 29^{o}}=2^{29}$$

ដូចនេះ $(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})=2^{29}$

លំហាត់ទី៤៣

គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យ $1-\cot a=1-\dfrac{\cos a}{\sin a}=\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a}$

ដោយ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(45^o-a)$

ហេតុនេះ $1-\cot a=\sqrt{2}\dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}$

យើងបាន $P=\prod_{a=1^o}^{44^o}(1-\cot a)=\prod_{a=1^o}^{44^o}\left[\sqrt{2}\dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}\right]$

$$P=(\sqrt{2})^{44}\frac{\sin 44^o.\sin 43^o.....\sin 1^o}{\sin 1^o.\sin 2^o.....\sin 44^o}=2^{22}$$

ដូចនេះ $P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o).....(1-\cot 44^o)=2^{22}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គណនា $A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដំណោះស្រាយ

យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $z^{11}=-1$

$$W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$$

ដោយ $1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$

$$W=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ផ្នែកពិតនៃ W គឺ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដូចនេះ

$$A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៤៥

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

តាង $z = \cos 20^o + i \sin 20^o$ ហើយ $z^9 = \cos 180^o + i \sin 180^o = -1$

$$\cos 20^o = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$ (ព្រោះ $\overline{z} = \frac{1}{z}$)

$$\cos 40^o = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} = \frac{z^4 + 1}{2z^2} \; ; \; \cos 80^o = \frac{z^4 + \overline{z}^4}{2} = \frac{z^8 + 1}{2z^4}$$

$$P = \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7(z^2-1)}$$

$$= \frac{z^{16} - 1}{8(z^9 - z^7)} = \frac{-z^7 - 1}{8(-1 - z^7)} = \frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យ $a ; b ; c ; d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x \neq k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

តាង $\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}=t$

គេទាញ $\begin{cases}\sin x = at\\ \sin 2x = bt\\ \sin 3x = ct\\ \sin 4x = dt\end{cases}$

គេមាន $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$d^2t^2 = 4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right)$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3 - 4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a})$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3 - \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2 - d^2}{4b^4} = \frac{3a - c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យ a, b, c, d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[0;\pi]$ ដោយដឹងថា

[illegible]

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន [illegible]

ឬ [illegible]

ឬ [illegible]

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

[illegible]

ដូចនេះ $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$

គេមាន $\tan\frac{8\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{27})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{27}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$

$$\tan\frac{10\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{27})=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{27}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$$

គេទាញ $\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{27}-\tan^3\frac{\pi}{27}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{27}}=\tan\frac{\pi}{9}$

គេបាន $P=\tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}$

គេមាន $\tan\frac{2\pi}{9}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9})=\frac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{9}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$

$$\tan\frac{4\pi}{9}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9})=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$$

គេទាញ $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}=\frac{3-\tan^2\frac{\pi}{9}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{9}}$

គេបាន $P=\frac{3\tan\frac{\pi}{9}-\tan^3\frac{\pi}{9}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{9}}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

ដូចនេះ $P=\tan\frac{[illegible]\pi}{27}\tan\frac{6[illegible]}{27}\tan\frac{[illegible]}{27}\tan\frac{1[illegible]}{27}\tan\frac{12[illegible]}{2[illegible]}=\sqrt{3}$

102

TRIGONOMETRY

PROBLEMS

លំហាត់ទី៤៩

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

គេមាន $\tan\frac{7\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{30})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{30}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

ហើយ $\tan\frac{11\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{30})=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{30}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{30}-\tan^3\frac{\pi}{30}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{30}}=\tan\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{5}=\pi-\frac{3\pi}{5}$ នោះ $\tan\frac{2\pi}{5}=\tan(\pi-\frac{3\pi}{5})=-\tan\frac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\frac{2\pi}{5}=\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}$ និង $\tan\frac{3\pi}{5}=\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

គេបាន $\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

ឬ $\frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាងដ $t=\tan^2\frac{\pi}{5}$

ដោយ $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ នោះ $\frac{1}{3}<t<1$

គេបាន $\frac{2}{1-t}=-\frac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$

$\Delta'=25-5=20$ គេទាញឫស $t_1=5-2\sqrt{5}\ ,\ t_2=5+2\sqrt{5}$

ដោយ $\frac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\frac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នោះ $\tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

គេបាន $\tan\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{10}}{1-\tan^2\frac{\pi}{10}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ តាង $u=\tan\dfrac{\pi}{10}>0$

គេបាន $\dfrac{2u}{1-u^2} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ឬ $u^2+\dfrac{2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}u-1=0$

$$\Delta' = \frac{1}{5-2\sqrt{5}}+1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-2\sqrt{5}}$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ t_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}} \end{array}\right.$

ដោយ $t>0$ នោះ $\tan\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

ដូច្នេះ $\tan\dfrac{\pi}{30}\tan\dfrac{7\pi}{30}\tan\dfrac{11\pi}{30} = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

លំហាត់ទី៥០

ចូរស្រាយថា $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

ឬ $\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos 3a$

កន្សោមដែលឲ្យអាចសរសេរជា ៖

$$S=\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3})$$

តាង $A=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

ហើយ $B=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{13\pi}{9}$

$$B=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$$

គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2B.\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2\,B.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin(-\frac{2\pi}{9})+\sin\frac{10\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$$

$$B\sqrt{3}=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}=2\sin\pi\cos(-\frac{7\pi}{9})=0$$

គេទាញបាន $B=0$

គេបាន $S=\frac{3}{4}B+\frac{1}{4}A=0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ ។

ដូចនេះ: $\cos^3\frac{\pi}{9}+\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៥១

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

គេមាន $\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}$, $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$, $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$

ហើយ $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{8\pi}{7}$ និង $\sin\frac{4\pi}{7}>0$

គេបាន $S=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$

លើកអង្គទាំពីរជាការេគេបាន ៖

$$S^2=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាង $A=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\ \cos(\pi + \frac{3\pi}{7}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{7}) + \cos(\pi - \frac{5\pi}{7})\ \right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

យក $B = -\cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន៖

$$2B\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

$$2B\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2B\sin\frac{\pi}{7} = -(\ \sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}) - (\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}) - \sin\frac{2\pi}{7}$$

$2B\sin\frac{\pi}{7} = -\sin$ [illegible] $\sin$ [illegible]

គេទាញ $B = -\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $A = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

តាង $C = 2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} - 2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$= \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7} = -2\sin\pi.\sin(-\frac{\pi}{7}) = 0$$

គេបាន $S^2 = A + C = \frac{7}{4} + 0 = \frac{7}{4}$ ដោយ $S > 0$

នោះ $S = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥២

ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2} \quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{12} = 2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \sin 2x$$

ដោយ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $x = \frac{\pi}{12}$ ឬ $x = \frac{11\pi}{36}$

ដូចនេះ $x \in \{ \frac{\pi}{12} \ ; \ \frac{11\pi}{36} \}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}-5}{2(a_n+2)}$ គ្រប់ $n\geq 0$

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0=\cot\dfrac{\pi}{24}-2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងមាន $a_{k+1}=\frac{a_k{}^2-5}{2(a_k+2)}$

ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $a_{k+1}=\dfrac{\left[\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ: $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_1 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ និង $t_{n+1} = \dfrac{3t_n - t_n^3}{1-3t_n^2}$ ដែល $n \in IN$

ក) ចូរស្រាយថា $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) គេតាង $t_n = \tan u_n$ ដែល $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{5}$

គេមាន $\dfrac{2\pi}{5} = \pi - \dfrac{3\pi}{5}$

នោះ $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \tan(\pi - \dfrac{3\pi}{5}) = -\tan\dfrac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\frac{2\pi}{5}=\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}$ និង $\tan\frac{3\pi}{5}=\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

គេបាន $\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

ឬ $\frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាង $t=\tan^2\frac{\pi}{5}$

ដោយ $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ នោះ $\frac{1}{3}<t<1$

គេបាន $\frac{2}{1-t}=-\frac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$

$\Delta'=25-5=20$ គេទាញឫស $t=5-2\sqrt{5}$, $t=5+2\sqrt{5}$

ដោយ $\frac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\frac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នាំឲ្យ $\tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

ដូចនេះ: $t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\tan\frac{\pi}{5}$ ។

ខ) ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ

គេមាន $t_n = \tan u_n$ ដែល $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n \in IN$

គេបាន $t_{n+1} = \tan u_{n+1}$ ដោយ $t_{n+1} = \frac{3t_n - t_n^3}{1 - 3t_n^2}$

នោះ $\tan u_{n+1} = \frac{3\tan u_n - \tan^3 u_n}{1 - 3\tan^2 u_n} = \tan 3u_n$

គេទាញ $u_{n+1} = 3u_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ នោះគេបាន

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $t_1 = \tan u_1 = \tan\frac{\pi}{5}$ នោះ $u_1 = \frac{\pi}{5}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{\pi}{5} \times 3^{n-1}$ និង $t_n = \tan\left(\frac{\pi}{5} \times 3^{n-1}\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យ $P_n=(\cot a+\cot a)(\cot a+\cot 2a)...(\cot a+\cot(na))$

ចូរបង្ហាញថា $P_n=\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1}a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $P_n=\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1}a}$

គេមាន $P_n=\prod_{k=1}^{n}[\cot a+\cot(ka)]$

ដោយ $\cot a+\cot(ka)=\dfrac{\sin(k+1)a}{\sin a\sin(ka)}$

គេបាន $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\sin(k+1)a}{\sin a\sin(ka)}\right]=\dfrac{1}{\sin^n a}\times\prod_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k+1)a}{\sin(ka)}$

ដោយ $\prod_{k=1}^{n}\dfrac{\sin(k+1)a}{\sin(ka)}=\dfrac{\sin 2a}{\sin a}\cdot\dfrac{\sin 3a}{\sin 2a}\cdots\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin(na)}=\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin a}$

ដូចនេះ $P_n=\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1}a}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

ចូរគណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=1}^{n}[1-\tan a\tan(ka)]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=1}^{n}[1-\tan a\tan(ka)]$

គេមាន $1-\tan a\tan(ka)=\dfrac{\cos a\cos(ka)-\sin a\sin(ka)}{\cos a\cos(ka)}$

$$=\frac{\cos(k+1)a}{\cos a\cos(ka)}$$

គេបាន $P_n=\prod_{k=1}^{n}[1-\tan a\tan(ka)]$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(k+1)a}{\cos a\cos(ka)}\right]=\frac{1}{\cos^n a}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{\cos(k+1)a}{\cos(ka)}$$

ដោយ $\prod_{k=1}^{n}\dfrac{\cos(k+1)a}{\cos(ka)}=\dfrac{\cos 2a}{\cos a}\cdot\dfrac{\cos 3a}{\cos 2a}\dots\dfrac{\cos(n+1)a}{\cos(na)}=\dfrac{\cos(n+1)a}{\cos a}$

ដូចនេះ $P_n=\dfrac{\cos(n+1)a}{\cos^{n+1}a}$

លំហាត់ទី៥៧

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $b^2+c^2\geq 2bc$ នោះ $a^2\geq 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{bc}\geq 4\sin^2\frac{A}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b^2}{ac}\geq 4\sin^2\frac{B}{2}$ (2) និង $\frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{C}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញបាន $\frac{2bc\cos A}{a^2}+1=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{2bc}{a^2}$ (1) ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$\frac{2ac\cos B}{b^2}+1\ge\frac{2ac}{b^2}$ (2) និង $\frac{2ab\cos C}{c^2}+1\ge\frac{2ab}{c^2}$ (3)

បូក (1),(2)និង(3)គេបាន ៖

$$\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ca\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}+3\ge 2\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)\ge 6$$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$

ដោយ $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

គេទាញបាន $\frac{a}{b+c}\ge\sin\frac{A}{2}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b}{c+a}\ge\sin\frac{B}{2}$ និង $\frac{c}{a+b}\ge\sin\frac{C}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦០

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ រួចសរសេររូបមន្តពីរទៀត ដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

ដោយ $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b-c}{b+c}=\tan\frac{B-C}{2}\tan\frac{A}{2}$ និង $\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{C-A}{2}\tan\frac{B}{2}$

លំហាត់ទី៦១

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ រួចទាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $b^2+c^2\ge 2bc$

នោះ $a^2\ge 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$ ឬ $\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4bc}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}.\frac{b}{2\sqrt{ac}}.\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq\frac{3}{2}$

ចូរស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\geq 0$

យើងឧបមាថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})<0$ ពិត

សមមូល $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq\frac{3}{2}$

នោះ $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}>\frac{3\sqrt{3}}{4}$

គេទាញ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ពិនិត្យ $T=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2}+\frac{\sqrt{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{2}$$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$ និង $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>\frac{3\sqrt{3}}{2}$

គេទាញ $T>\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$ មិន[illegible]ចំនួនពិត α,β,γ

គេមាន $T=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})\le 1+1+1=3$

នាំឲ្យការឧបមាខាងលើខុស ។

ដូចនេះ $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ α និង β ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាងសំណើ $p:\ \sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

$q:\alpha=\beta$ ។ ដើម្បីស្រាយថា $p\Leftrightarrow q$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត ។

យើងស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត ៖

តាម $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ គេអាចសរសេរ ៖

$$\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\beta\right)^3+(-1)^3-3\left(\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\beta\right)(-1)=0$$

ដោយប្រើសមភាព ៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

បើគេយក $a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\beta$, $c=-1$ នោះគេបាន ៖

$$\left[\begin{array}{ll} a+b+c=0 & (1) \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 & (2) \end{array}\right.$$

តាម (2) គេទាញ $a=b=c$ ឬ $\sin^2\alpha=\cos^2\beta=-1$ (មិនអាច)

តាម(1)គេបាន$\sin^2\alpha+\cos^2\beta-1=0$ ឬ$\sin^2\alpha=1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$

ដោយ $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ នោះ $\alpha=\beta$ ។

យើងស្រាយថា $q\Rightarrow p$ ពិត ៖

បើ $\alpha=\beta$ នោះយើងត្រូវស្រាយថា ៖

$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$ ពិតគ្រប់ $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

តាម $a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$ យក $a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\alpha$

គេបាន $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$ ពិត

ដូចនេះ$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។

លំហាត់ទី៦៤ (APMC 1982)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$ និង $b_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

ដើម្បីស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}\right)$ ពិត

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = 1$ ពិត

យក $t_k = \tan\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ [illegible]

$$a_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}$$

និង $b_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k}$

គេបាន $a_k b_k = \dfrac{3-t_k{}^2}{1-3t_k{}^2} = \dfrac{1}{t_k} \times \dfrac{3t_k - t_k^3}{1-3t_k{}^2} = \dfrac{t_{k+1}}{t_k}$

ព្រោះតាមរូបមន្ត $\tan 3\varphi = \dfrac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1-3\tan^2\varphi}$

គេបាន $\dfrac{3t_k - t_k^3}{1-3t_k{}^2} = t_{k+1}$ ។

ហេតុនេះ $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{t_{k+1}}{t_k} = \dfrac{t_2}{t_1}.\dfrac{t_3}{t_2}...\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{t_{n+1}}{t_1}$

ដោយ $t_k = \tan\dfrac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ នោះ $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{3^n-1}$

ហើយ $t_{n+1} = \tan\dfrac{3^n\pi}{3^n-1} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{3^n-1}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3^n-1}$

គេបាន $\prod\limits_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3^n-1}}{\tan\dfrac{\pi}{3^n-1}} = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\prod\limits_{k=1}^{n}\tan\left[\dfrac{\pi}{3}\left(1+\dfrac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod\limits_{k=1}^{n}\cot\left[\dfrac{\pi}{3}\left(1-\dfrac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេដឹងថា $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}$, $v=e^{iy}$, $w=e^{iz}$ គេបាន៖

$$u+v+w=\left(\cos x+\cos y+\cos z\right)+i\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)$$

ហើយ $uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$

គេមាន $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ $\dfrac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

តាមសមភាពនេះគេទាញបាន ៖

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$$

និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ រួចទាញថា

បើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

គេមាន $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$ និង $\cos^2 B=\dfrac{1+\cos 2B}{2}$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)$$
$$=-2\cos C\cos(A-B)$$

នោះ $\cos^2 A+\cos^2 B=1-\cos C\cos(A-B)$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$
$$=1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$
$$=1-2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ ។

ទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$

គេមាន $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

តាមរូបមន្ត $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ នោះគេបាន ៖

$$3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=1-2\cos A\cos B\cos C$$

គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

បើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\begin{cases}\cos A>0\\ \cos B>0\\ \cos C>0\end{cases}$

នាំឲ្យ $2+2\cos A\cos B\cos C>2$ ។

ដូចនេះបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$

$$\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ដោយ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

គេបាន $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$

ដោយ $1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}=2-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\le 2$

ដូច្នេះ $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cot A+\cot B=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C}$

ដោយ $\cos(A-B)\leq 1$ នោះ $\cot A+\cot B\geq\dfrac{2\sin C}{1+\cos C}=2\tan\dfrac{C}{2}$

$$\cot A+\cot B+\cot C\geq 2\tan\frac{C}{2}+\cot C=2\tan\frac{C}{2}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}-1}{2\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot A+\cot B+\cot C\geq\frac{\cot^2\frac{C}{2}+3}{2\cot\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{C}{2}+3\tan\frac{C}{2}\right)$$

ដោយ $\cot\dfrac{C}{2}+3\tan\dfrac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ (តាម $AM-GM$) ។

ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមានជ្រុង

$BC = a, AC = b, AB = c$ ។

បើ $a < \dfrac{b+c}{2}$ នោះបង្ហាញថាមុំ $A < \dfrac{B+C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ នោះ } \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

វិសមមភាព $a < \dfrac{b+c}{2}$ សមមូល $2R\sin A < R\sin B + R\sin C$

ឬ $\sin A < \dfrac{\sin B + \sin C}{2} = \sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} \le \sin\dfrac{B+C}{2}$

ដោយ A និង $\dfrac{B+C}{2}$ ជាមុំស្រួចនោះ $A < \dfrac{B+C}{2}$ ។

ដូចនេះ បើ $a < \dfrac{b+c}{2}$ នោះ $A < \dfrac{B+C}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ខ)ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4S\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញបាន $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ ហើយ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

គេបាន $b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}=2bc\cos A+2\sqrt{3}\,bc\sin A$

$$=4bc(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$$

$$=4bc\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)$$

ដូចនេះ $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

គេមាន $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ដោយ $\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\leq 1$ នោះ $\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}\leq 1$

គេទាញ $4bc\geq b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}$

សមមូល $a^2+b^2+c^2\geq 2(b-c)^2+4\sqrt{3}S$ ដោយ $(b-c)^2\geq 0$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

តាងជ្រុង $BC = a, AC = b$ និង $AB = c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2bc}{a^2}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2bc}{a^2}$

សន្មតថា $B \neq C$ នោះតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$\frac{\sin B + \sin C}{2} \geq \sqrt{\sin B \sin C}$$

ឬ $\sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \geq \sqrt{\sin B \sin C}$

ដោយ $\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin B = \frac{b}{a}, \sin C = \frac{c}{a}$

គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{B-C}{2} \geq \sqrt{\frac{bc}{a^2}}$ សមមូល $\cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2bc}{a^2}$ ពិត។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A > \frac{\pi}{2}$ ។

តាងជ្រុង $BC = a, AC = b$ និង $AB = c$ ។

ចូរស្រាយថា $|\cos A| \le \frac{a^6}{54b^3c^3}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|\cos A| \le \frac{a^6}{54b^3c^3}$

បើ $A > \frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos A = -|\cos A|$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេបាន ៖

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 + 2bc|\cos A|$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc|\cos A| \ge 3\sqrt[3]{2b^3c^3.|\cos A|}$$

គេទាញ $|\cos A| \le \frac{a^6}{54b^3c^3}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC ដែល

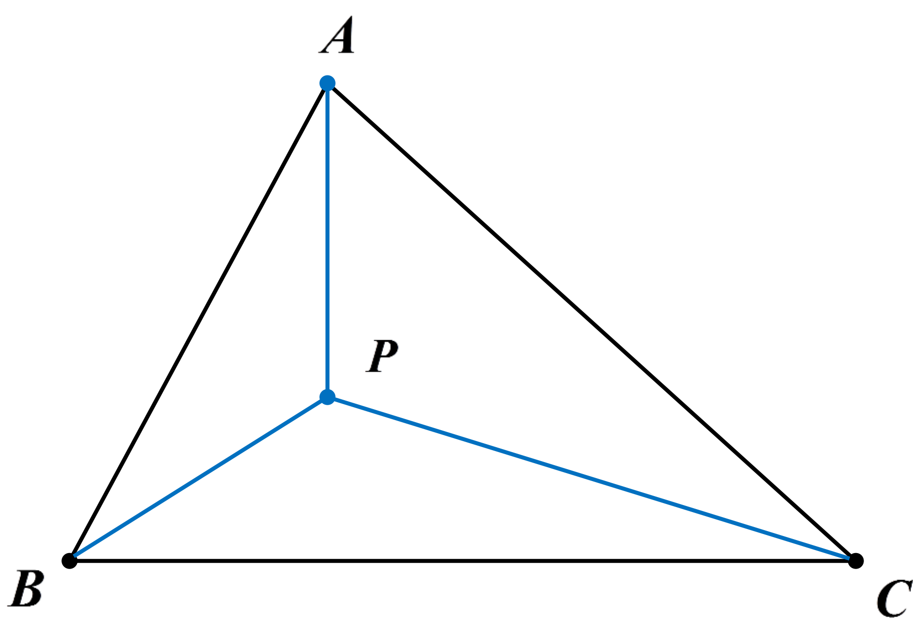
$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \omega$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$ ។

ខ)ទាញឲ្យបានថា $\omega \leq \frac{\pi}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$



តាង $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c\ ,PA=x\ ,PB=y,PC=z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង $\Delta PAB\ ,\Delta PBC\ ,\Delta\ PCA$

គេបាន $\begin{cases} x^2=z^2+b^2-2bz\cos\omega \\ y^2=x^2+c^2-2cx\cos\omega \\ z^2=y^2+a^2-2ay\cos\omega \end{cases}$

បូកសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2(ay+bz+cx)\cos\omega$$

គេទាញ $\cos\omega=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2(ay+bz+cx)}$ (1)

គេមាន $S_{ABC}=S_{PAB}+S_{PBC}+S_{PCA}$ ដោយ $\begin{cases} S_{PAB}=\frac{1}{2}cx\sin\omega \\ S_{PBC}=\frac{1}{2}ay\sin\omega \\ S_{PCA}=\frac{1}{2}bz\sin\omega \end{cases}$

គេបាន $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}(cx+ay+bz)\sin\omega$

គេទាញ $\sin\omega=\dfrac{2S_{ABC}}{cx+ay+bz}$ (2)

ធ្វើផលចែករវាង (1) និង (2) គេបាន $\cot\omega = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$ **(3)**

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ហើយ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

គេទាញ $\sin A = \dfrac{2S_{ABC}}{bc}$ ។ ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cot C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$ **(4)**

តាម (3) និង (4) គេបាន $\cot\omega = \cot A+\cot B+\cot C$ ពិត

ខ)ទាញឲ្យបានថា $\omega \le \dfrac{\pi}{6}$

គេមាន $\cot\omega = \cot A+\cot B+\cot C$

ដោយ $\cot A+\cot B+\cot C \ge \sqrt{3}$ (មើលលំហាត់ទី១៨)

គេបាន $\cot\omega \ge \sqrt{3} = \cot\dfrac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $\omega \le \dfrac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី៧៤ (IMO1966)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ $a + b = \tan\frac{C}{2}(a\tan A + b\tan B)$ នោះ ABC

ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = \tan\frac{A}{2}$ និង $v = \tan\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\frac{C}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{A+B}{2} = \frac{1-uv}{u+v}$

ហើយ $\tan A = \frac{2u}{1-u^2}, \tan B = \frac{2v}{1-v^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a = 2R\sin A = 2R\frac{2u}{1+u^2}, b = 2R\frac{2v}{1+v^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

សមភាព $a + b = \tan\frac{C}{2}(a\tan A + b\tan B)$ សមមូល ៖

$$4R\left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{v}{1+v^2}\right) = 4R\frac{1-uv}{u+v}\left(\frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} + \frac{v^2}{(1+v^2)(1-v^2)}\right)$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន ៖

$$(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2)=2(1-uv)^2(u^2+v^2)$$

គេមាន $(u+v)^2 \le 2(u^2+v^2)$ (1) (វិសមភាព $Cauchy-Schwarz$)

$$(1-u^2)(1-v^2)=(1-uv)^2-(u-v)^2 \le (1-uv)^2 \quad (2)$$

គុណវិសមភាព(1)និង(2) អង្គ និងអង្គគេបាន

$$(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2) \le 2(1-uv)^2(u^2+v^2)$$

ដើម្បីឲ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ (1) និង (2)

ក្លាយជាសមភាពពេលគឺគេត្រូវឲ្យ $u=v$ នោះ $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}$

សមមូល $A=B$ ([illegible] $a=b$)

ដូចនេះបើ $a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$ នោះ ABC

ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 c)$

គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$ (1)

យើងនឹងស្រាយថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2+2\cos A\cos B\cos C$$

គេមាន $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$ និង $\sin^2 B = \dfrac{1-\cos 2B}{2}$

គេបាន $\sin^2 A+\sin^2 B = 1-\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

$$= 1-\cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$= 1-\cos(\pi - C)\cos(A-B)$$
$$= 1+\cos C\cos(A-B)$$

ហើយ $\sin^2 C = 1-\cos^2 C$ នោះគេបាន

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$$
$$= 2+\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$
$$= 2+\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$
$$= 2+2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $1+\cos A\cos B\cos C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

និង $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$

តាង $\begin{cases} x = b^2+c^2-a^2 \\ y = c^2+a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y = 2c^2 \\ y+z = 2a^2 \\ z+x = 2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} x+y \ge 2\sqrt{xy} \\ y+z \ge 2\sqrt{yz} \\ z+x \ge 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx} = 8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \dfrac{1}{8}$

គេទាញ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2} = 1+\cos A\cos B\cos C \le 1+\dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8}$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$ ។

លំហាត់ទី៧៦ (IMO 1977)

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$$

ដែល a,b,A,B ជាចំនួនពិត ។

ចូរស្រាយថាបើគ្រប់ $x\in IR: f(x)\geq 0$ នោះ $a^2+b^2\leq 2$

និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $r=\sqrt{a^2+b^2}$ និង $R=\sqrt{A^2+B^2}$ ហើយយក α និង β ដែល

$\cos\alpha=\frac{a}{r}$, $\sin\alpha=\frac{b}{r}$ និង $\cos 2\beta=\frac{A}{R}$,$\sin 2\beta=\frac{B}{R}$

គេបាន $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

$$=1-r\cos(x-\alpha)-R\cos(2x-2\beta)$$

គេមាន $f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R$

និង $f(\pi+\beta)=1-r\cos(\pi+\beta-\alpha)-R=1+r\cos(\beta-\alpha)-R$

គេបាន $f(\beta)+f(\pi+\beta)=2-2R\geq 0$ នោះ $R\leq 1$

សមមូល $\sqrt{A^2+B^2}\leq 1$ ឬ $A^2+B^2\leq 1$ ។

គេមាន $f(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-r\frac{\sqrt{2}}{2}+R\sin(2\alpha-2\beta)$

និង $f(\alpha-\frac{\pi}{4})=1-r\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin(2\alpha-2\beta)$

គេបាន $f(\alpha+\frac{\pi}{4})+f(\alpha-\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}r\geq 0$ នោះ $r\leq\sqrt{2}$

សមមូល $\sqrt{a^2+b^2}\leq 2$ ឬ $a^2+b^2\leq 2$ ។

ដូចនេះបើគ្រប់ $x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 0$ នោះ $a^2+b^2\leq 2$

និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរស្រាយថា $A\le\frac{\pi}{3}$ លុះត្រាតែ $(p-b)(p-c)\le\frac{bc}{4}$ ដែល a,b,c ជាជ្រុង និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $A\le\frac{\pi}{3}$ សមមូល $\sin\frac{A}{2}\le\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

សមមូល $\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{1}{4}$ ដោយ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

សមមូល $\frac{1-\cos A}{2}\le\frac{1}{4}$ សមមូល $\cos A\ge\frac{1}{2}$

ដោយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ge\frac{1}{2}$ សមមូល $b^2+c^2-a^2\ge bc$

សមមូល $a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\le bc$

សមមូល $4(p-b)(p-c)\le bc$ ឬ $(p-b)(p-c)\le\frac{bc}{4}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះ

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ នោះ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{4bc}$

ដោយ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$ និង $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\dfrac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\dfrac{a^2}{4bc}$

$$\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2}{2bc}$$

$-(b-c)^2=0$ នាំឲ្យ $b=c$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

លំហាត់ទី៧៩

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\geq\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\geq\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$

តាង $a\,,b,c$ ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

គេមាន $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$ (S ជាផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ)

គេបាន $\sin B=\frac{2S}{ac}$ និង $\sin C=\frac{2S}{ab}$ ។

ហើយ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\,,\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$ និង $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$ ។

វិសមភាពសមមូល ៖

$$\frac{\frac{2S}{ac}}{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}+\frac{\frac{2S}{ab}}{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}\geq 4\,\frac{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}{1-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

$$\frac{2S}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq\frac{4\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}-\sqrt{(p-b)(p-c)}}$$

ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq\frac{2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)}{p(p-a)}$$

$$p\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq 2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq 2$$ និង $$p\geq\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}$$

នោះគេបានវិសមភាពខាងលើពិត ។

លំហាត់ទី៨០

ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ ដោយយកតម្លៃ $a=\frac{\pi}{8}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$$1=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$ នាំឲ្យ $\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$

តាង $t=\tan\frac{\pi}{8}$ ដែល $t>0$

គេបាន $t^2+2t-1=0$; $\Delta'=1+1=2$

គេទាញឬស $t_1=-1+\sqrt{2}$, $t_2=-1-\sqrt{2}<0$ (មិនយក)

ដូចនេះ $\boxed{\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 x\neq 0$ គេបានសមីការ ៖

$$\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+(\sqrt{2}-1)=0 \ .$$

តាង $t=\tan x$ គេបាន ៖

$t^2-\sqrt{2}\,t+(\sqrt{2}-1)=0$ ដោយ $a+b+c=0$

គេទាញឬស $t_1=1$; $t_2=\sqrt{2}-1$ ។

-ចំពោះ $t = 1$ គេបាន $\tan x = 1$ នាំឲ្យ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , k \in Z$

-ចំពោះ $t = \sqrt{2} - 1$ គេបាន $\tan x = \sqrt{2} - 1$

នាំឲ្យ $x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad , k \in Z$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , \quad x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad , k \in Z$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{\tan x + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)\tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ដោយ $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ គេបាន

$$\frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan x . \tan \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan(x + \frac{\pi}{8}) = \tan \frac{\pi}{6}$$

គេទាញ $x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{24} + k\pi \quad , k \in Z$

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យសមីការ $(E): \cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫស ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

នាំឲ្យ $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

ហើយ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

នាំឲ្យ $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

សមីការ (E) អាចសរសេរ ៖

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x=m$$

$$3\cos x\cos 3x+\cos^2 3x+3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x=4m$$

$$3(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)=4m$$

$$3\cos 2x+\cos 6x=4m$$

$$4\cos^3 2x=4m$$

$$\cos 2x=\sqrt[3]{m}$$

ដោយ $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ គេបាន $\cos 2x =$ [illegible]

នាំឲ្យ $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,k\in Z$

ខ. រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ៖

ដើម្បីឲ្យសមីការ[illegible] $-1\le\sqrt[3]{}$ [illegible]

ឬ $m\in[-1\ ,1]$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR

ដោយ $f(0)=0$ និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$

គេមាន [illegible]

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^n គេបាន

[illegible]

គេមាន [illegible]

គេទាញ [illegible] ដោយយក $a=\frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេបាន [illegible]

យក (២) ជួសក្នុង (១) គេបាន

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ដូចនេះ $f(n)=\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a)x_n + \frac{1}{2}(1+\cos a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(1-\cos a)x_n + \frac{1}{2}(\sin a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, \dots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង [illegible] និង

[illegible] ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន ៖

[illegible]

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos a$ គេបាន ៖

[illegible]

គេមាន ៖

[illegible]

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\sin a$ គេបាន ៖

[illegible]

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

[illegible]

ដោយ [illegible]

គេទាញបាន [illegible] នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង [illegible] ។

ដកសមីការ **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

[illegible]

ដោយ [illegible] គេទាញ [illegible]

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង [illegible] ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

គេមាន [illegible]

គេបាន [illegible]

ហើយ [illegible]

គេបាន [illegible]

ដូចនេះ [illegible] ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

ដោយ [illegible]

និង [illegible]

គេបាន [illegible]

គេទាញ [illegible]

[illegible]

ហើយ [illegible]

គេទាញ [illegible]

លំហាត់ទី៨៤

គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0, 1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z នៃចន្លោះ $(0, \frac{\pi}{2})$

គេយក [illegible]

វិសមភាពសមមូល [illegible]

ដោយ $\forall z\in(0,\frac{\pi}{2})$ គេមាន $\cos z<1$ និង $\sin z<1$

គេទាញ [illegible] និង [illegible]

នាំឱ្យ [illegible]

[illegible]

ដោយ [illegible] នោះ [illegible] ពិត

ដូចនេះ [illegible] ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឱ្យ A, B, C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0<A,B,C<\pi$ នោះ $0<\frac{A}{2};\frac{B}{2};\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2}>0;\cot\frac{B}{2}>0;\cot\frac{C}{2}>0$

តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^3\ge 27\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យ A, B, C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា [illegible]

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា [illegible]

ដោយ A, B, C ជាមុំស្រួចនោះ [illegible]

តាមវិសមភាព AM-GM គ្រប់ [illegible] គេមាន:

[illegible]

យក [illegible]

[illegible]

គេមាន [illegible]

$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \tan$ [illegible]

គេទាញ [illegible]

$x + y + z = x$ [illegible]

តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន ៖

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xy}$ [illegible]

$xyz \geq 3\sqrt[3]{xy}$ [illegible]

គេទាញ $xyz \geq 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A$ [illegible]

គេបាន [illegible]

ដូចនេះ [illegible] ។

✧✧✧✧✧

✧✧✧✧

✧✧✧

✧✧

✧

លំហាត់ទី៨៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A, B, C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\ge 18$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\ge 18$

តាង $\sum=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$$=\frac{\tan^2 A}{\cos A}+\frac{\tan^2 B}{\cos B}+\frac{\tan^2 C}{\cos C}$$

តាមវិសមភាព Cauchy Schwarz គេបាន ៖

$$\sum\ge\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

គេបាន [illegible]

[illegible]

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

[illegible]

ឬ [illegible]

គេទាញ [illegible]

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos$ [illegible] ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន [illegible]

[illegible]

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

[illegible]

$$[illegible]$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A\cos B\cos C} \ge$ [illegible]

គុណវិសមភាព (2)&(3) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{(\tan A \ldots)^2}{\cos A\cos B\cos C} \ge \text{[illegible]}$$

តាម (1)&(4) គេទាញបាន $\Sigma \ge 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C} \ge$ [illegible] ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

[illegible] ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេមាន $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ [illegible]

ដោយ [illegible] (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស)

[illegible]

[illegible]

តែ [illegible]

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin A = 1$

នាំឲ្យ $A = 90^\circ$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ (**R** :កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$ **(I)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

យក **(I)** ជួសក្នុង **(II)** គេបាន ៖

[illegible]

[illegible]

គេទាញ [illegible]

ហេតុនេះ [illegible]

ដូចគ្នាដែរ [illegible]

ហើយនឹង [illegible]

បូកទំនាក់ទំនង (1);(2) និង (3) គេទទួលបាន ៖

[illegible]

ម៉្យាងទៀតគេមាន [illegible] ឬ [illegible]

គេបាន [illegible]

[illegible]

គេទាញ [illegible]

គុណអង្គទាំងពីរនឹង [illegible]

គេបាន [illegible]

គេមាន $\begin{cases} x^2+y^2\geq 2xy \\ y^2+z^2\geq 2yz \\ z^2+x^2\geq 2zx \end{cases}$

នោះគេបាន [illegible]

ឬ [illegible]

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង [illegible] គេបាន ៖

[illegible]

យក [illegible]

គេបាន [illegible]

នាំឱ្យ [illegible]

តាម (4) និង (5) គេបាន [illegible]

ដូចនេះ [illegible] ។

លំហាត់ទី៩០

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ តាង **r** និង **R** រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា [illegible]

ខ. បើ **ABC** ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (\sqrt{2}+1)r$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា [illegible]

គេមាន [illegible]

ដោយ [illegible]

និង [illegible]

[illegible]

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន [illegible]

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស ៖

[illegible] ដោយ [illegible]

[illegible]

គេទាញ [illegible]

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2}$ [illegible]

ស្រាយដូចគ្នាដែរ ៖

[illegible]

គេបាន ៖

$$[illegible]$$

ដោយ $S = [illegible] = \frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\begin{cases} [illegible] = \frac{[illegible]}{p} \\ abc = [illegible] R \end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{[illegible]}{abc} = [illegible]$

ដូចនេះ $[illegible]$

ខ. បើ **ABC** ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R [illegible] (\sqrt{2} + [illegible]$

ឧបមាថា **ABC** ជាត្រីកោណកែងត្រង់ **A** នោះ $\frac{A}{2} [illegible]$

ដោយ $[illegible]$

គេបាន $[illegible] \left(\frac{\pi}{2}\right) [illegible]$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=1+\frac{r}{R}$$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)\le 1$ នោះ $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(\sqrt{2}+1)r$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a,b,c** ។ តាង **r** និង **R** រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC ។

ក. ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

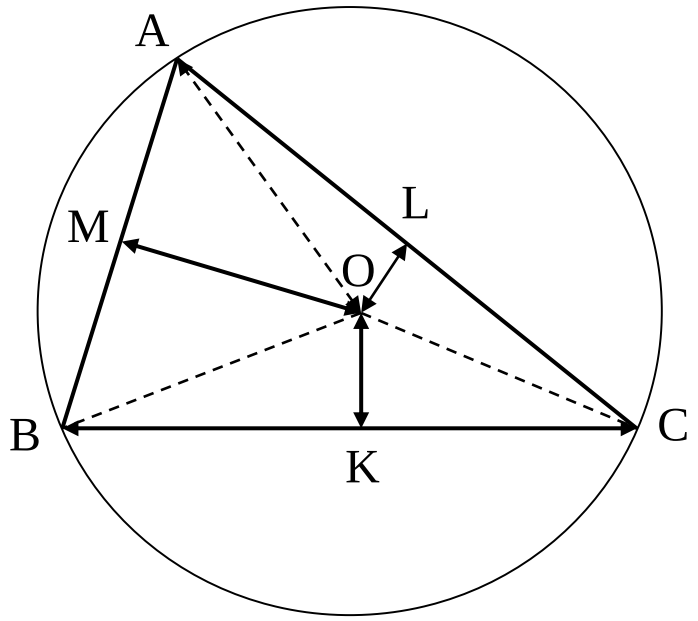
$$\cos A\cos B\cos C=\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}$$

ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$ (A,B,C ជាមុំស្រួច)

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$



គេមាន $\angle BOK = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$ (មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកក្នុងរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង OKB គេមាន $\cos\angle BOK = \frac{OK}{OB}$

គេទាញ $OK = R\cos A$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $OL = R\cos B ,\ OM = R\cos C$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន ៖

$$S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$$

$$pr = \frac{1}{2}BC.OK + \frac{1}{2}CA.OL + \frac{1}{2}AB.OM$$

$$pr = \frac{1}{2}aR\cos A + \frac{1}{2}bR\cos B + \frac{1}{2}cR\cos C$$

$$pr = \frac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

ដូចនេះ [illegible] ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$\frac{\cos B}{b} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ និង $\frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

ដូចនេះ $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន ៖

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - (a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$

$$= \frac{(a+b)(b+c)(c+a) - 2abc - (a^3+b^3+c^3)}{2abc} \quad (*)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=\frac{abc}{4R}=pr$ នោះ $abc=4Rpr$

គេបាន [illegible]

គេទាញ [illegible]

ដោយ [illegible]

គេបាន [illegible]

ឬ [illegible]

ហើយ [illegible]

គេទាញបាន [illegible]

ទំនាក់ទំនង (*) អាចសរសេរ [illegible]

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{4p(p^2+r^2+4Rr)-4(p^3-3pr^2-6pRr)}{8Rpr}$$

$$=\frac{p^2+r^2+4Rr-p^2+3r^2+6Rr}{2Rr}$$

$$=\frac{2r^2+2Rr}{2Rr}=\frac{r}{R}+1$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$

តាម $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\le(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$

យក $x_1=\sqrt{a\cos A}\,,\ x_2=\sqrt{b\cos B}\,,\ x_3=\sqrt{c\cos C}$

និង $y_1=\sqrt{\frac{\cos A}{a}}\,,\ y_2=\sqrt{\frac{\cos B}{b}}\,,\ y_3=\sqrt{\frac{\cos C}{c}}$ គេបាន ៖

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\le\frac{2pr}{R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$\left(1+\frac{r}{R}\right)^2\le\frac{2pr}{R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{8Rpr}$$

$$\frac{(r+R)^2}{R^2}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

តាង $BC = a\ , AC = b\ , AB = c$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ , \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

និង $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន $\cos A\cos B\cos C = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$

តាង $\begin{cases} x = b^2+c^2-a^2 \\ y = c^2+a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y = 2c^2 \\ y+z = 2a^2 \\ z+x = 2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} x+y\geq 2\sqrt{xy} \\ y+z\geq 2\sqrt{yz} \\ z+x\geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\dfrac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\leq\dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

តាង $y=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$=1-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\left[\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\right]$$

ដោយ $\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\geq 0$

គេទាញ $y=\frac{3}{2}-2\left[\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\right]\leq\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$ ។

សម្គាល់ ៖

គេអាចស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

តាមវិសមភាព $Euler$ គេមាន $R\geq 2r$ ឬ $\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan x+\tan y+\tan z\geq 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan x+\tan y+\tan z\geq 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

$$\tan x+\tan y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}$$

$$=\frac{\sin x\cos y+\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$=\frac{2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})}{\cos x\cos y}=2\tan\left(\frac{x+y}{2}\right).\frac{\cos^2(\frac{x+y}{2})}{\cos x\cos y}$$

ដោយ $\cos^2\frac{x+y}{2}=\frac{1+\cos(x+y)}{2}=\frac{1+\cos x\cos y-\sin x\sin y}{2}$

ឧបមាថា $\frac{\cos^2\frac{x+y}{2}}{\cos x\cos y}\geq 1$ សមមូល $\cos^2\frac{x+y}{2}\geq\cos x\cos y$

សមមូល $\dfrac{1+\cos x\cos y-\sin x\sin y}{2}\geq \cos x\cos y$

សមមូល $1+\cos x\cos y-\sin x\sin y\geq 2\cos x\cos y$

សមមូល $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\leq 1$ ពិត

គេទាញបាន $\tan x+\tan y\geq 2\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ (1)

$$\tan z+\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq 2\tan\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}\right)=2\tan\left(\frac{x+y+4z}{6}\right) \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\tan x+\tan y+\tan z+\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq 2\left[\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)+\tan\left(\frac{x+y+3z}{6}\right)\right]$$

ដោយ $\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+\tan\left(\dfrac{x+y+4z}{6}\right)\geq 2\tan\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

គេបាន $\tan x+\tan y+\tan z+\tan\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)\geq 4\tan\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

ដូចនេះ: $\tan x+\tan y+\tan z\geq 3\tan\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

លំហាត់ទី៩៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab \ge 4\sqrt{3}\,S$?

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab \ge 4\sqrt{3}\,S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញ $bc=\frac{2S}{\sin A}$, $ca=\frac{2S}{\sin B}$ និង $ab=\frac{2S}{\sin C}$

គេបាន $bc+ca+ab=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ដែល $x\in(0\,,\pi)$

គេមាន $f'(x)=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

ហើយ $f''(x)=-\frac{(\cos x)'\sin^2 x-(\sin^2 x)'\cos x}{\sin^4 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}>0$

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ដោយ $f(A)+f(B)+f(C)=\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}$

ហើយ $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

គេបាន $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}\quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$ ។

ដូចនេះ: $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$ ។

លំហាត់ទី៩៦

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2+b^2+c^2 \geq (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S \quad ?$$

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន ៖

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A = (b-c)^2+2bc(1-\cos A)$$

$$a^2 = (b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2} \quad (1)$$

គេមាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

គេទាញ $bc = \dfrac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$ (2)

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$a^2=(b-c)^2+4\times\frac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\times\sin^2\frac{A}{2}=(b-c)^2+4S\tan\frac{A}{2}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នា $b^2=(c-a)^2+4S\tan\frac{B}{2}$ (2)

និង $c^2=(a-b)^2+4S\tan\frac{C}{2}$ (3) ។

បូកសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4S.T\quad(4)$$

ដែល $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $f'(x)=\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ហើយ $f''(x)=2(\tan x)'\tan x=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន ៖

$$f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})\ge 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=3f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

ដោយ $f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

និង $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

គេបាន $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}$ (5)

តាម (4) និង (5) គេបាន ៖

$a^2+b^2+c^2\geq(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S$ ពិត។

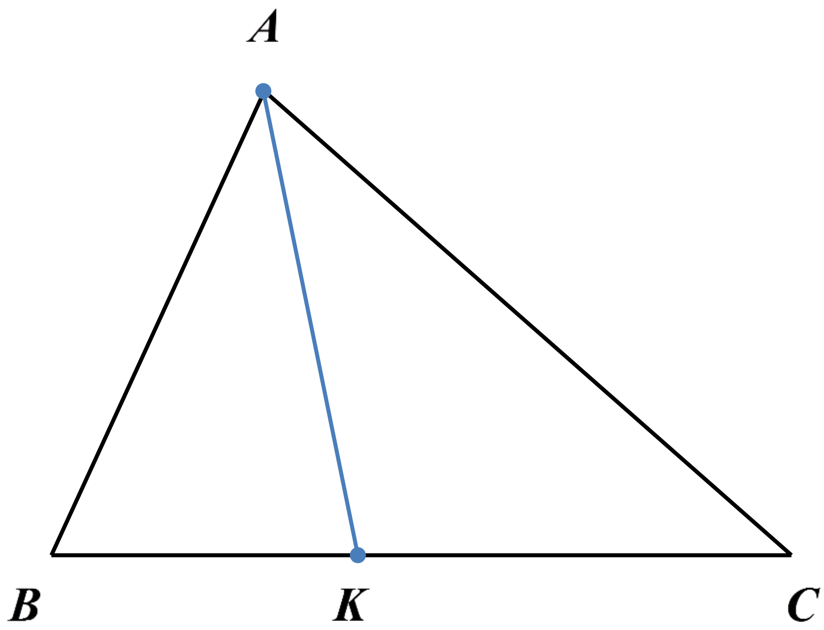
លំហាត់ទី៩៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានផ្ទៃក្រលា S ។ AK, BL, CM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A,B,C រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S}\geq 3\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S}\geq 3\sqrt{3}$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ។

គេមាន $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{AKC}$ ដោយ $\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \\ S_{AKC} = \frac{1}{2}c.AK\sin\frac{A}{2} \\ S_{AKC} = \frac{1}{2}AK.b\sin\frac{A}{2} \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c.AK\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b.AK\sin\frac{A}{2}$

$$bc\sin A = (b+c)AK.\sin\frac{A}{2}$$

គេទាញ $AK = \frac{bc}{b+c}.\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$

គេបាន $AK = \frac{2bc}{b+c}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

លើកជាការេ $AK^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

$$= \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

ដោយ $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ នោះ $\frac{bc}{(b+c)^2}\leq\frac{1}{4}$

គេទាញបាន $AK^2\geq bc-\frac{a^2}{4}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $BL^2\geq ca-\frac{b^2}{4}$ (2) និង $CM^2\geq ab-\frac{c^2}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន ៖

$$AK^2+BL^2+CM^2\geq bc+ca+ab-\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \quad (4)$$

គេមាន $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$ (5) (មើលលំហាត់ទី៩៥)

ហើយ $a^2+b^2+c^2\geq(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S$

ឬ $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}\,S$ (6) (មើលលំហាត់ ៩៦)

តាម (4) និង (6) គេទាញបាន ៖

$$AK^2+BL^2+CM^2\geq\frac{bc+ca+ab}{2}+\sqrt{3}S \quad (7)$$

តាម(5) និង (7) ៖ $AK^2+BL^2+CM^2\geq\frac{4\sqrt{3}S}{2}+\sqrt{3}S=3\sqrt{3}S$

ដូចនេះ $\frac{AK^2+BL^2+CM^2}{S}\geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឱ្យ $a; b; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា៖

[illegible]

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

[illegible]

ជ្រើសរើស $A,B,C\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt{2}\tan A \\ b=\sqrt{2}\tan B \\ c=\sqrt{2}\tan C \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} a^2+2=2(1+\tan^2 A)=\dfrac{2}{\cos^2 A} \\ b^2+2=2(1+\tan^2 B)=\dfrac{2}{\cos^2 B} \\ c^2+2=2(1+\tan^2 C)=\dfrac{2}{\cos^2 C} \end{cases}$

នាំឱ្យ [illegible]

តាង [illegible]

[illegible]

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង៖

[illegible]

គេទាញបាន៖

[illegible]

តាង $\theta=\frac{A+B+C}{3}$ ។

តាមវិសមភាព AM-GM និង Jensen យើងបាន៖

[illegible]

គេទាញ [illegible]

ដោយ [illegible]

គេបាន [illegible]

[illegible]

តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន៖

[illegible]

នាំឱ្យ [illegible] ពិត ។

ដូចនេះ [illegible] ពិត។

លំហាត់ទី៩៩ (MOSP 2000)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា ៖

$$4-8\cos A\cos B\cos C=4(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)$$

គេមាន $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$ និង $\cos^2 B=\dfrac{1+\cos 2B}{2}$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$= 2\cos(\pi - C)\cos(A - B)$$
$$= -2\cos C\cos(A - B)$$

នោះ $\cos^2 A + \cos^2 B = 1 - \cos C\cos(A - B)$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos C\cos(A - B) + \cos^2 C$$

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 - \cos C\left[\cos(A - B) - \cos C\right] \\ &= 1 - \cos C\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right] \\ &= 1 - 2\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

ដូចនេះ $4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 4 - 8\cos A\cos B\cos C$

នោះវិសមភាពសមមូល

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2 + \left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2 \geq 4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

តាង $u = \cos A$, $v = \cos B$, $w = \cos C$ នោះវិសមភាពទៅជា ៖

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 + \left(\frac{w}{u}\right)^2 \geq 4\left(u^2 + v^2 + v^2\right) \quad (*)$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{u^4}{v^2w^2}} = \frac{3u^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$$

គេទាញ $2\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{v}{w}\right)^2 \ge \frac{3u^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2\left(\frac{v}{w}\right)^2+\left(\frac{w}{u}\right)^2 \ge \frac{3v^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$ (2)

និង $2\left(\frac{w}{u}\right)^2+\left(\frac{u}{v}\right)^2 \ge \frac{3w^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$ (3) ។

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន

$$3\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{v}{w}\right)^2+\left(\frac{w}{u}\right)^2\right] \ge \frac{3}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}\left(u^2+v^2+w^2\right)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{v}{w}\right)^2+\left(\frac{w}{u}\right)^2 \ge \frac{1}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}\left(u^2+v^2+v^2\right)$$ ។

ដើម្បីស្រាយថា (*) ពិតគេត្រូវស្រាយថា $\frac{1}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}} \ge 4$

ឬ $uvw \le \frac{1}{8}$ ឬ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

តាង $BC=a\,,AC=b\,,\,AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,,\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

និង $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$

តាង $\begin{cases} x=b^2+c^2-a^2 \\ y=c^2+a^2-b^2 \\ z=a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y=2c^2 \\ y+z=2a^2 \\ z+x=2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} x+y\geq 2\sqrt{xy} \\ y+z\geq 2\sqrt{yz} \\ z+x\geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\dfrac{1}{8}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geq \cot A+\cot B+\cot C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geq \cot A+\cot B+\cot C$$

តាង $\begin{cases} p=\cot A+\cot B+\cot C \\ q=\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A \\ r=\cot A\cot B\cot C \end{cases}$

ដោយ $A+B+C=\pi$ នាំឲ្យ $\cot(A+B)=\cot(\pi-C)$

ឬ $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$

ឬ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ នោះ $q=1$

មាន $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$

ឬ $x^3+y^3+z^3+6xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz$

នោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយសមមូល $p^3-3pq+9r\geq p$

ឬ $p^3-4pq+9r\geq 0$ ព្រោះ $q=1$ ។

តាមវិសមភាព *Schur* គ្រប់ $x,y,z\geq 0$ និង $r>0$គេមាន ៖

$\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\geq 0$ ។ យក $r=1$ និង $\begin{cases} x=\cot A \\ y=\cot B \\ z=\cot C \end{cases}$

គេបាន $\sum_{cyc} x(x-y)(x-z)=p^3-4pq+9r\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geq \cot A+\cot B+\cot C$$

លំហាត់ទី១០១

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា $\cos\frac{B-C}{2}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos\frac{B-C}{2}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$

គេមាន $\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដោយ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

និង $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុងត្រីកោណ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

គេបាន $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+\frac{p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ $S=\frac{1}{2}bc\sin A=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $2r=\frac{bc\sin A}{p}$ និង $R=\frac{a}{2\sin A}$ នោះ $\frac{2r}{R}=\frac{2bc\sin^2 A}{ap}$

យើងត្រូវស្រាយថា $\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}\geq\sqrt{\frac{2bc\sin^2 A}{ap}}$

ឬ $\frac{(b+c)^2}{a^2}\sin^2\frac{A}{2}\geq\frac{2bc\sin^2 A}{ap}=\frac{8bc\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{ap}$

សមមូល $(b+c)^2\geq\frac{8abc}{p}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{8abc}{p}.\frac{p(p-a)}{bc}=8a(p-a)$

សមមូល $(b+c)^2\geq 4a(b+c-a)=4a(b+c)-4a^2$

សមមូល $(b+c)^2-4a(b+c)+4a^2=(b+c-2a)^2\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\cos\frac{B-C}{2}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$ ។

លំហាត់ទី១០២

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4\ (*)$$

តាមរូបមន្ត $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$ គេបាន ៖

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}$$

គេមាន

ដោយ

និង គេបាន ៖

[illegible]

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad (2)$$

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

វិសមភាព (*) សមមូល ៖

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេមាន $\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដោយ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

និង $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុងត្រីកោណ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

គេបាន $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+\frac{p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$

ដូចគ្នាដែរ $\cos\frac{C-A}{2}=\frac{c+a}{2}\sin\frac{B}{2}$ និង $\cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{c}\sin\frac{C}{2}$

គេបាន ៖

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc$

គេទាញ $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ពិត

ដូចនេះ:

$$4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4\ (*)$$

☹☺☹☺☹

ឯកសារយោង

1) **Geometric Inequalities Marathon**

(Samer Seraj September 4, 2011)

2) **Inequalities a Mathematical Olympiad Approach**

(Radmila Bulajich Manfrino , Jose Antonio Gomez Ortega Rogelio Valdez Delgado)

3) **103 Trigonometry Problems**

(Titu Andreescu , Zuming Feng)

4) **360 Problems for Mathematical Contests**

(Titut Andreescu , Dorin Andrica)

5) **A problem book in algebra .**

(Translated from the Russian by Victor Shiffer)